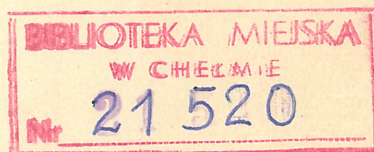
HUGO STEINHAUS

KALEJDOSKOP MATEMATYCZNY



WARSZAWA 1954
PAŃSTWOWE ZAKŁADY WYDAWNICTW SZKOLNYCH

POD REDAKCJĄ A. M. RUSIECKIEGO





Wszystkie teksty powołują się na rysunki, które oznaczono liczbami ujętymi w nawiasy. Tymi samymi liczbami oznaczono uwagi podane na końcu książki

PRZEDMOWA

Dając polskiemu czytelnikowi drugie (a w ogóle siódme) wydanie mojego *Kalejdoskopu* zastrzegam się, tak jak w przedmowie do pierwszego wydania, że ta książka nie chce być ani planowym wykładem jakiegoś działu matematyki, ani popularnym opracowaniem zagadnień tej nauki. Jest to książka z obrazkami. Główne jej zadanie, mianowicie uwidocznienie matematyki, i w nowym wydaniu stoi na pierwszym planie, jednak nie starałem się unikać dłuższych wyjaśnień słownych tam, gdzie to było niezbędne.

Myliłby się, kto by sądził, że *Kalejdoskop* jest zbiorem szarad i ciekawostek, bo pomija rzeczy poważne, a zajmuje się dziecinnymi zabawkami. To prawda, że apeluje on do ciekawości dziecka pokazując mu przedmioty nieznane i fascynujące, jednak sama przyroda postępuje nie inaczej. Czy przez to świat jest sklepem z zabawkami? Sądzę, że nie, a jeżeli jest, to trudno z tego samego robić zarzut *Kalejdoskopowi*.

Wiele jest takich obrazków, w których czytelnik nie dopatrzy się matematyki. Są one po prostu ładne. Kiedy mi przyszły do głowy, chciałem widzieć model, a gdy go zrobiono, chciałem zobaczyć, jak to wyjdzie na fotografii — dorośli, a nawet dorośli matematycy też muszą się czasem pobawić. Nie byłoby to możliwe bez pomocy rysowników, modelarzy i fotografów. W pierwszym wydaniu było 180 rycin, w niniejszym jest ich przeszło 300. Do pierwszego wydania robili rysunki Engelstein, Grünberg i Halicka, a fotografie Wanda Diamandówna; do tych nazwisk, które wspominam z wdzięcznością, dodaję obecnie nazwisko p. Bronisława Kupca z katedry fototechniki Politechniki Wrocławskiej i rysowników: pp. W. Wdowiaka, A. Trojanowskiego i A. Tyczyńskiego. Modele do nowego wydania robił p. Ryszard Nowakowski; są one własnością Seminarium Matematycznego Uniwersytetu im. Bolesława Bieruta we Wrocławiu.

Do zrozumienia książki nie trzeba umieć matematyki wyższej. Są wprawdzie w niej i trudniejsze miejsca, ale można je pominąć, gdyż *Kalejdoskop* nie jest jakimś systematycznym podręcznikiem. Kto chce, może się zastanowić nad pytaniami; niektóre są łatwe, są takie, na które autor nie zna odpowiedzi, a także i takie, których dziś nikt nie umie rozstrzygnąć.

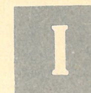
Na końcu książki są uwagi, w których czytelnik znajdzie źródła przeważnej większości pomysłów.

Kilka osób przejrzało krytycznie rękopis: M. Kac (pierwsze wydanie), H. S. M. Coxeter i H. Robbins (amerykańskie); przy wykończeniu niniejszego wydania asystował mi p. J. Mycielski. Autorką tytułu jest moja żona.

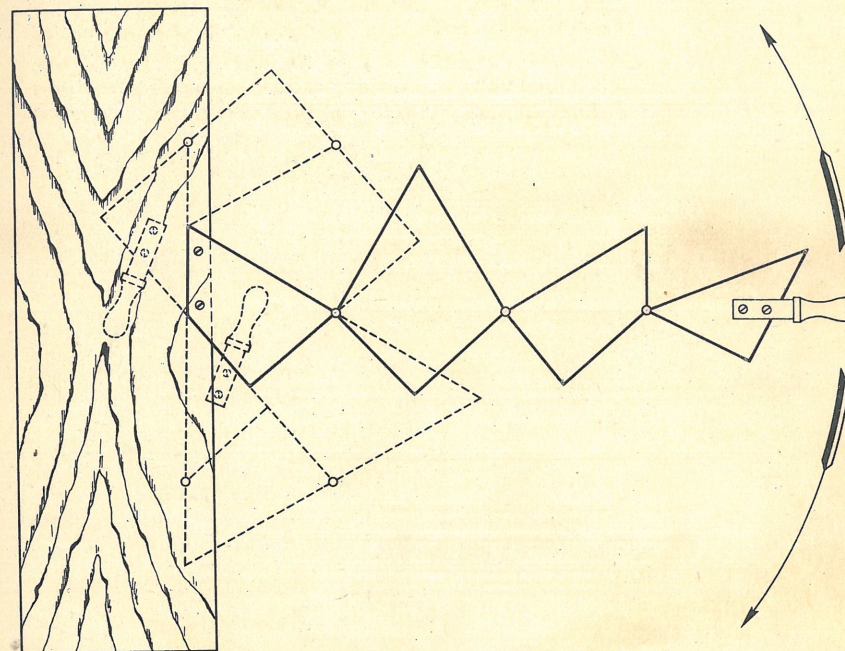
Jaka jest teza tej książki? Są dwie: 1. przedmiotem matematyki jest rzeczywistość, 2. matematyka jest uniwersalna: nie ma rzeczy, która by była jej obca. Tych tez nie znajdzie czytelnik w żadnym obrazku z osobna, ale gdy je przeglądnie wszystkie, zobaczy, że taka właśnie jest ich wspólna treść.

H. St.

Wrocław, dn. 16 września 1954

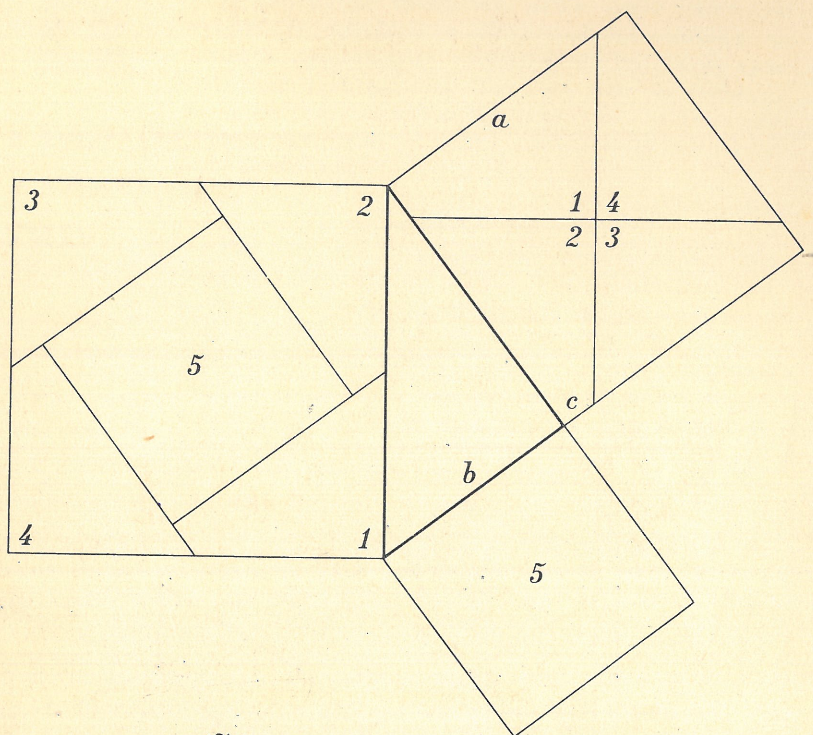


TRÓJKĄTY KWADRATY GRY



(1)

Z tych czterech deszczułek (1) złożymy kwadrat lub trójkąt równoboczny, zależnie od tego, czy rączkę przekręcimy w jedną, czy w drugą stronę.

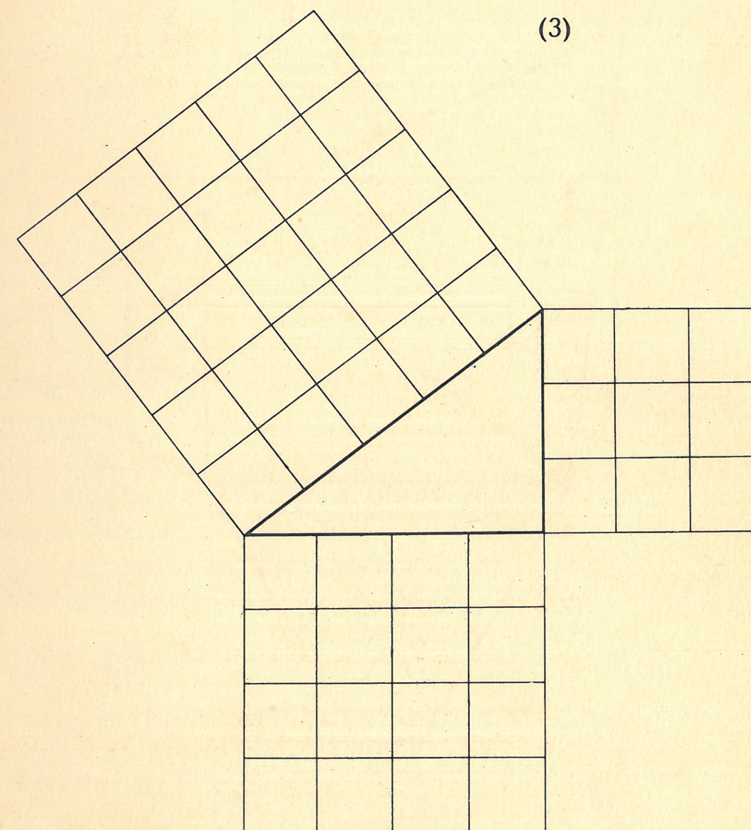


(2)

Chcąc rozłożyć kwadrat na dwa kwadraty rysujemy (2) trójkąt prostokątny; by się przekonać, że duży kwadrat jest sumą mniejszych, rozcinamy średni kwadrat na cztery części linią pionową i poziomą przez środek i przesuwamy te ćwiartki bez obracania w rogi dużego kwadratu; pozostanie w nim wolna część środkowa, którą pokryjemy przesuwając na nią mały kwadrat. Że mały kwadrat akuratnie pasuje do wolnej części, widać z równości $a = b + c$.

Sens twierdzenia, które właśnie udowodniliśmy, wyjaśnia (3) trójkąt o bokach 3, 4, 5: jest $9 + 16 = 25$.

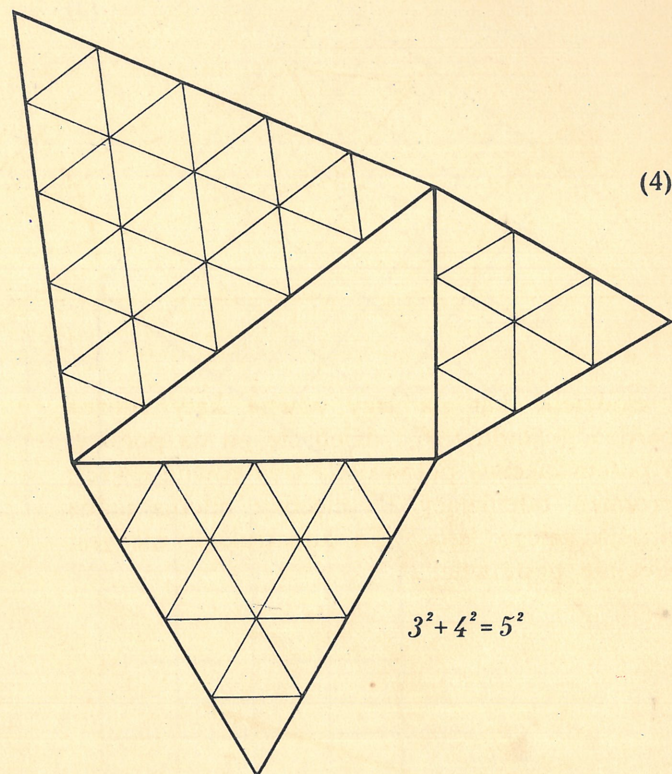
(3)



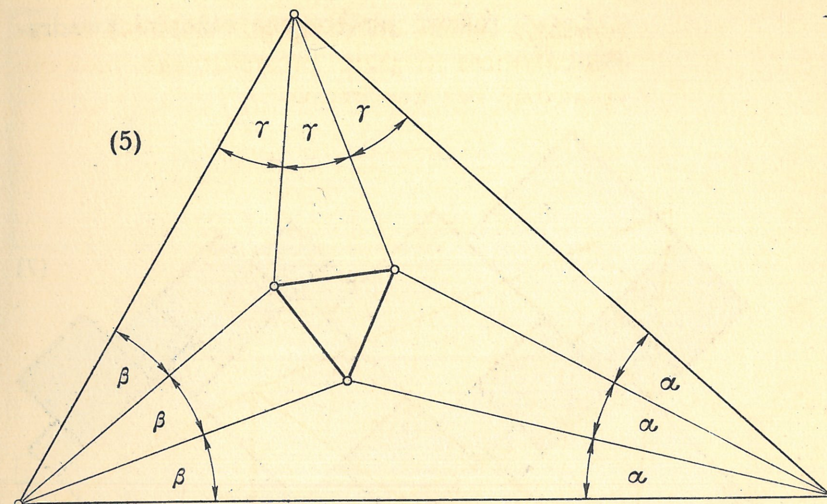
$3^2 + 4^2 = 5^2$

Możemy zatem narysować kąt prosty, jeżeli mamy zamknięty sznurek 12-centymetrowy, a na nim znaczki w odległości 3, 4 i 5 cen-

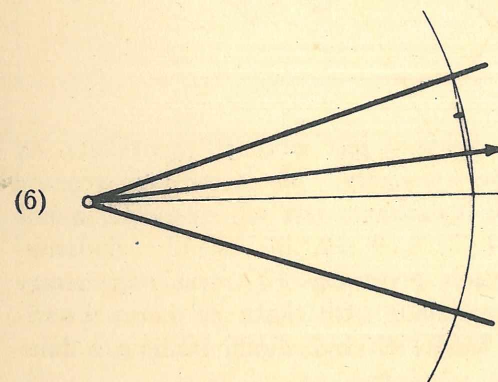
tymetrów jeden od drugiego. Ale (4) tę samą własność trójkąta prostokątnego możemy sprawdzić bez kwadratów.



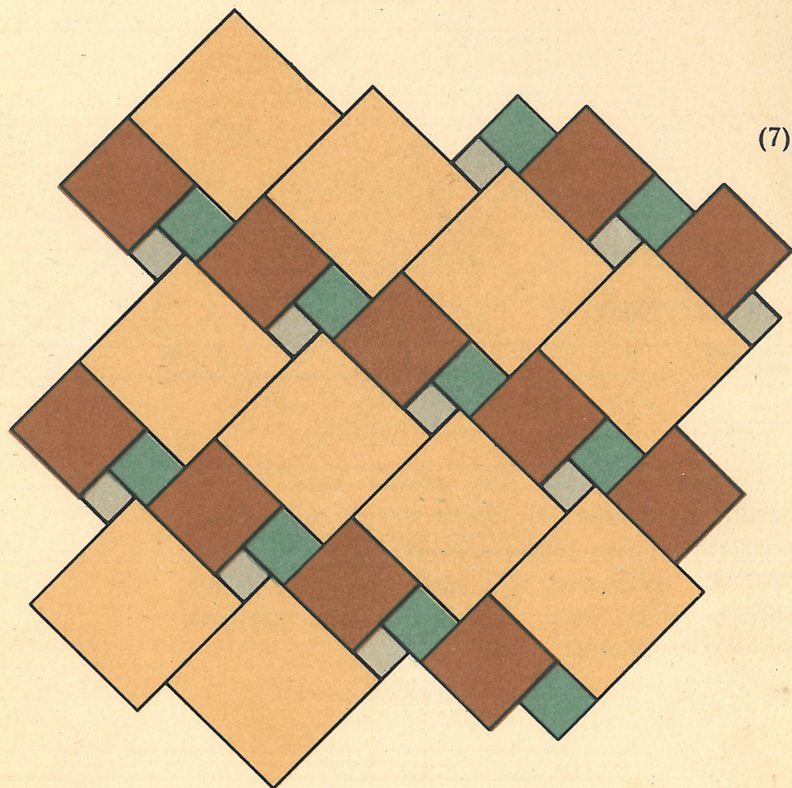
Chcąc otrzymać trójkąt równoboczny możemy zacząć od dowolnego trójkąta (5) i podzielić każdy jego kąt na trzy kąty równe: powstanie wtedy w środku mały trójkąt równoboczny.



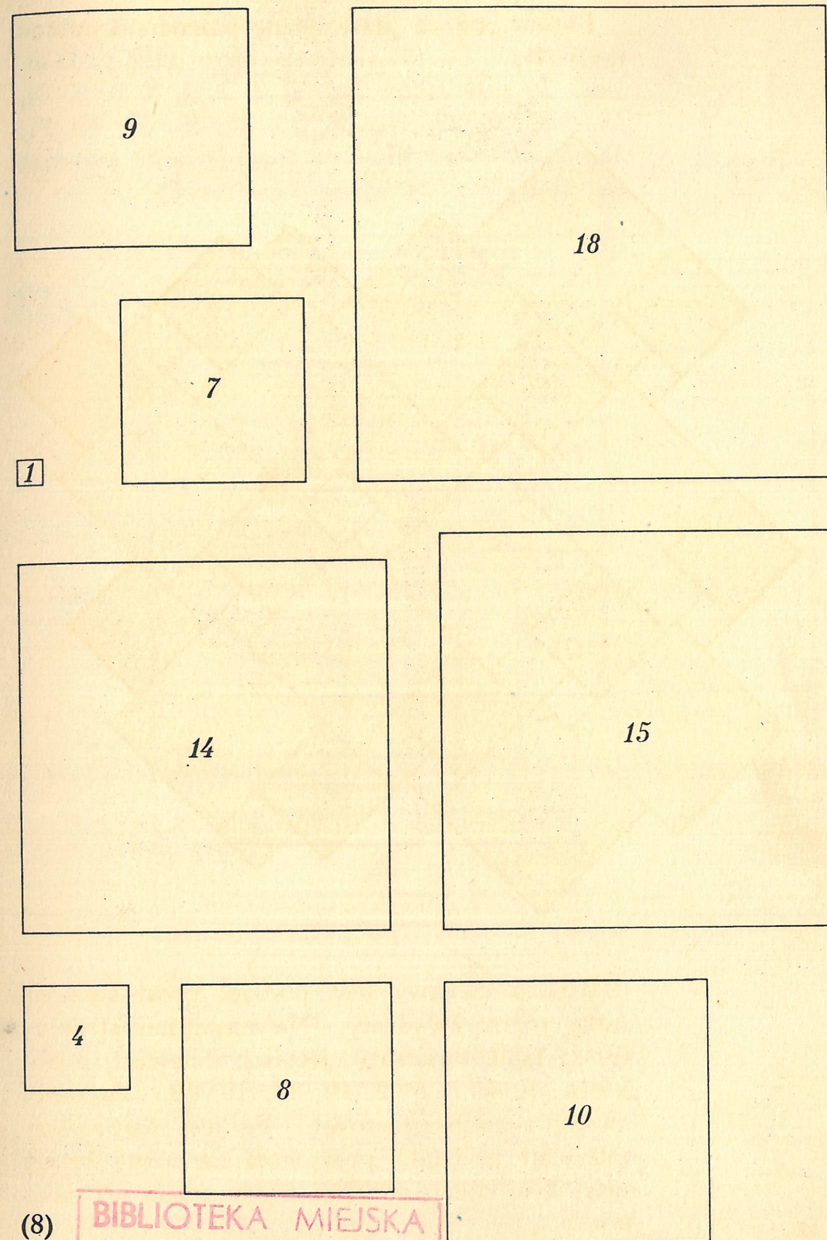
Podzielić kąt na trzy równe kąty można bardzo dokładnie (6): dzieli się go na połowy, a potem cięciwę połówki na trzy równe części; promień odcinający 2/3 cięciwy odcina jedną trzecią całego kąta. Ta konstrukcja nie jest idealnie poprawna.



Łatwo pokryć płaszczyznę różnymi kwadratami (7).


(7)

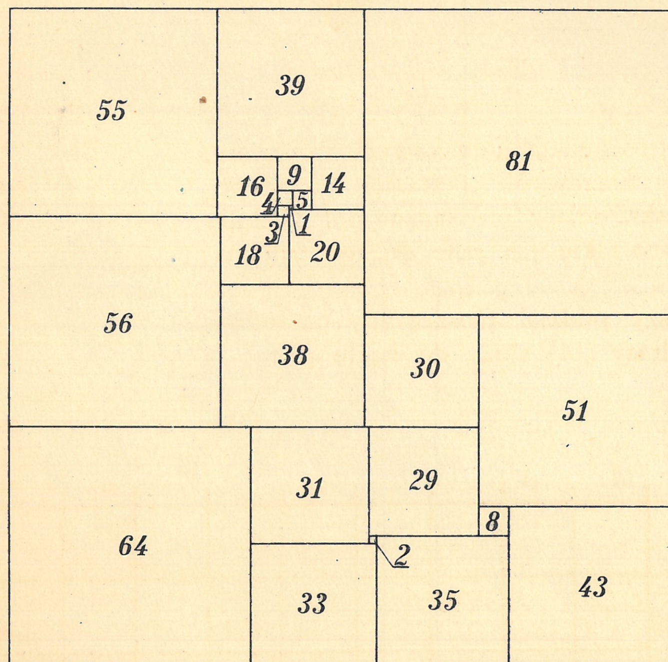
Bardzo ciekawy jest podział prostokąta na same różne kwadraty. Na następnej stronicy (8) są takie kwadraty; jest ich dziewięć, o bokach: 1, 4, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 18. Zadanie: złożyć z nich prostokąt. To jest najprostszy przykład podziału prostokąta na różne kwadraty. Nie może ich być nigdy mniej niż dziewięć.



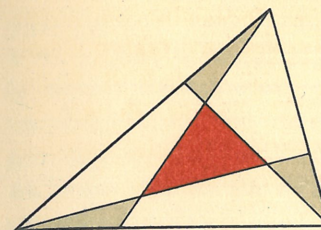
(8)

Można nawet kwadrat podzielić na różne kwadraty. Tu (9) narysowaliśmy taki podział. Boki 24 kwadratów są: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 14, 16, 18, 20, 29, 30, 31, 33, 35, 38, 39, 43, 51, 55, 56, 64, 81. Czy można podzielić kwadrat na mniej niż 24 różne kwadraty?

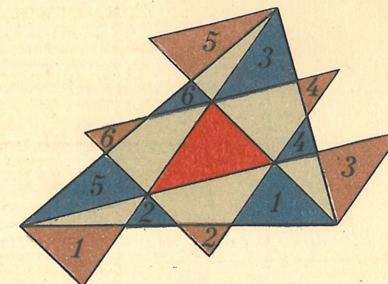
(9)



Aby z dowolnego trójkąta wyciąć inny, o 7 razy mniejszym polu, odcinamy (10 A) jedną trzecią z każdego boku i łączymy końce tych odcinków z przeciwległymi wierzchołkami; czerwony trójkąt w środku jest jedną siódmą całości, a dowód można odczytać z rysunku obok (10 B): czerwone pole i 6 pól szaro-



(10 A)

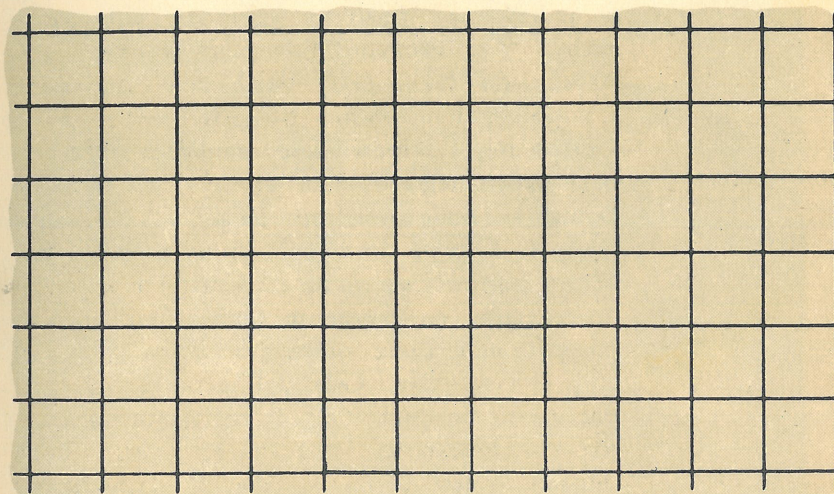


(10 B)

-brązowych to siedem jednakowych trójkątów; wystającymi brązowymi częściami można pokryć niebieskie pola, a więc łączne pole siedmiu trójkątów jest takie, jak pole dużego trójkąta.

Najprostszy podział płaszczyzny na jednakowe kwadraty (11) służy do wielu gier.

(11)



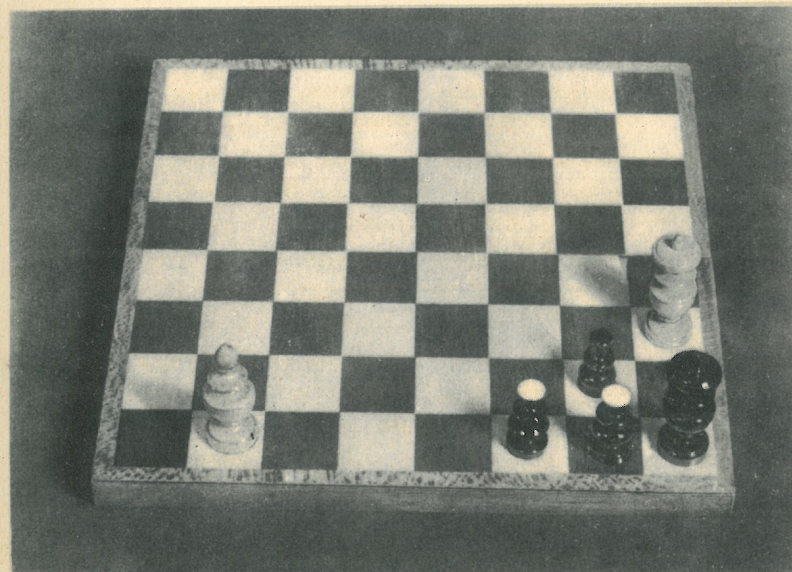
a	*b*	*c*
d	*e*	*f*
g	*h*	*i*

(12)

Na dziewięciu polach (12) można grać w szubienicę. Jeden gracz ma trzy białe krążki, drugi — trzy czarne. Stawiają je na przemian, a gdy już wszystkie sześć są na szachownicy, wolno je przesuwać na pola przyległe, ale nie w skos. Wygrywa ten, kto ustawi swoje krążki w jeden rząd poziomy, pionowy lub przekątny. Kto zaczyna, powinien wygrać: wystarczy do tego, żeby zajął pole środkowe, a potem grał należycie. Bo jeśli Białe zajęły *e*, Czarne mogą odpowiedzieć zajęciem rogu lub pola przyległego bokiem do *e*. Jeżeli Czarne zajmą *a*, Białe powinny zająć *h*, zmuszając przez to Czarne do zajęcia *b*; na to Białe powinny postawić na *c*, na co Czarne z konieczności zajmą *g*. Teraz w dwóch najbliższych posunięciach Białe przejdą z *e* na *f* i z *h* na *i* — i wygrają. Gdyby Czarne wybrały na początku pole boczne, np. *b*, Białe zajmą *g*, Czarne z konieczności *c*, Białe *a*, Czarne będą musiały zająć *d* — i w dwóch najbliższych posunięciach biały krążek przejdzie z *g* przez *h* na *i*, zanim najbliższy czarny krążek *c* zdoła temu przeszkodzić. Można umówić się, że zaczynającemu nie wolno pierwszego krążka postawić na polu środkowym; wtedy gra, prowadzona poprawnie przez obie strony, nigdy się nie skończy.

Są pozycje szachowe, które można ściśle zanalizować. Tak np. końcówka dra J. Bergera (13) zapewnia zwycięstwo Białym, jeżeli zaczną od posunięcia H b1-b8. Jeżeli jednak zaczną inaczej, przegrają, o ile Czarne będą grały poprawnie. Przy właściwym posunięciu początkowym Białych i dalszej poprawnej grze z ich strony już po ośmiu posunięciach ich wygrana okaże się oczywista.

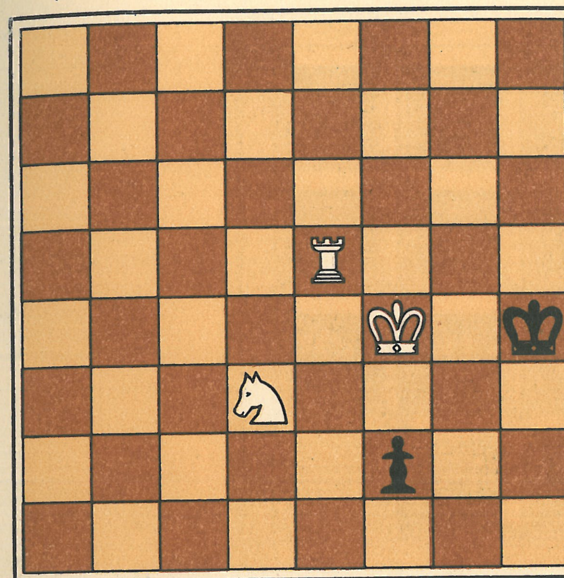
(13)



Niektóre końcówki szachowe są sławne z powodu zręcznie ukrytego rozwiązania i bogactwa wariantów. Tak np. początkujący gracz nie od razu zobaczy, jak w sytuacji (14) Białe dadzą mata najpóźniej w czwartym posunięciu.

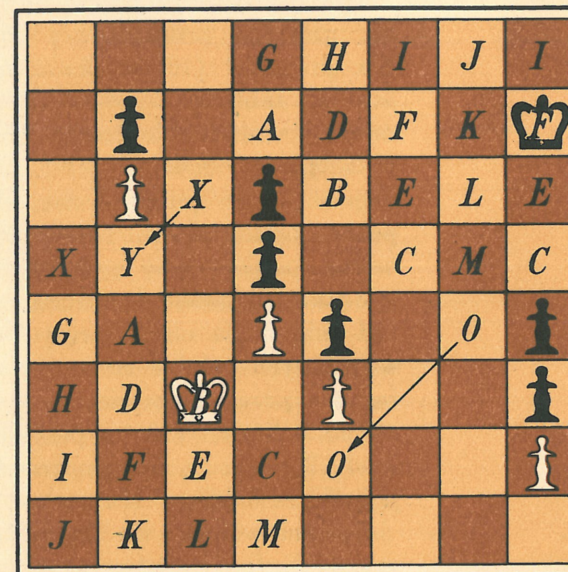
Końcówka dra K. Ebersza (15) ma zupełnie matematyczny charakter. Można ściśle udowodnić, że Białe nie pozwolą czarnemu królowi zabić żadnego z białych pionków, jeżeli tylko zawsze biały król będzie szedł na pole oznaczone tą samą literą, co to, na którym stoi czarny król. Z tej reguły wynika, że pierwszy krok Białych musi być *B-F*. Jeżeli Białe będą stale przestrzegały tej reguły, gra będzie nierozegrana; jeżeli choćby raz tylko od niej odstąpią, Czarne będą mogły (jeżeli zechcą) nie dopuścić ich już nigdy do owej taktyki, a czarny król przedrze się na tyły Białych przez lukę *X-Y* lub *O-O*, co da Czarnym zwycięstwo.

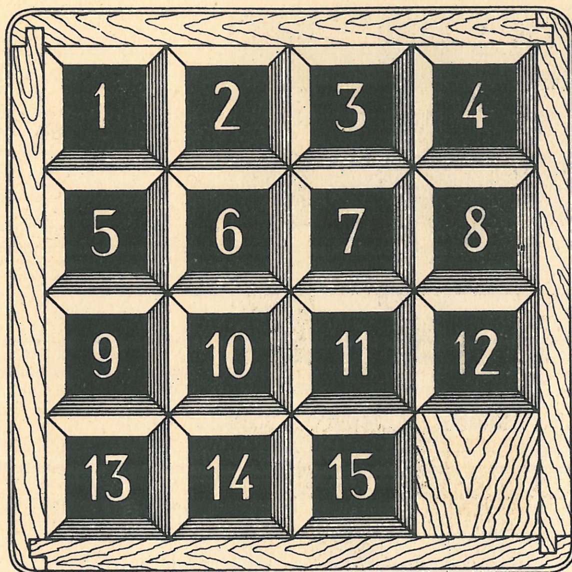
Czytelnik nie musi być wielkim szachistą, żeby sobie zapewnić rezultat 1 : 1 w równoczesnej grze na dwóch szachownicach przeciw spółce złożonej z dwóch mistrzów. Wystarczy zażądać, żeby mistrz *A* grał Białymi a mistrz *B* Czarnymi i żeby *A* rozpoczął partię. To początkowe posunięcie Białych Czytelnik (*C*) powtórzy jako swoje otwarcie partii na szachownicy *B*; gdy *B* odpowie, *C* przeniesie ów czarny ruch jako swoją odpowiedź na pierwsze posunięcie mistrza *A* na jego szachownicę itd. Tym sposobem na obu szachownicach rozegra się ta sama partia. Wynik może być tylko 1, 0 lub 1/2 na pierwszej szachownicy dla *C*, a tym samym 0, 1 lub 1/2 na drugiej, więc *C* zdobędzie 1 punkt (1 + 0, 0 + 1 lub 1/2 + 1/2), a spółka też 1.



(14)

(15)

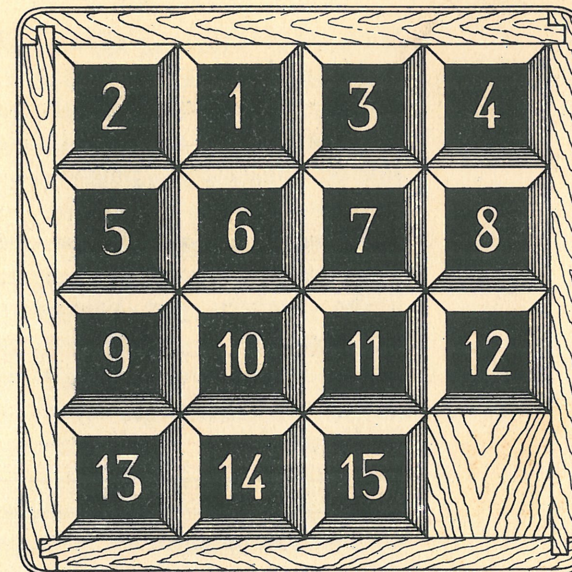




(16)

Nie ma matematycznej teorii gry w szachy, ale niektóre prostsze gry mają taką teorię. Na przykład (16) w kwadratowym pudełku leży 15 tabliczek numerowanych i jest jedno miejsce wolne. Zmieńmy porządek tabliczek układając je dowolnie (17), a potem przesuwajmy je w pudełku tak, żeby przywrócić pierwotny ich układ. Teoria jest taka: nazwijmy wolne miejsce „16"; każdy układ tabliczek jest jakimś ustawieniem liczb 1, 2, 3, . . . , 15, 16. Od ustawienia naturalnego 1, 2, . . . , 16 liczb wypisanych kolejno można przejść do każdego innego przez odpowiednie przestawienie sąsiednich liczb. Tak na przykład do ustawienia 2, 1, 3, 4, . . . , 16 dojdziemy przestawiając jedynkę z dwójką. Nazywamy to ruchem.

Są ustawienia, do których trzeba nieparzystej liczby ruchów, a są takie, do których



(17)

trzeba parzystej, ale nie ma takich, do których wiodłyby dwie drogi od ustawienia naturalnego: jedna przez nieparzystą, a druga przez parzystą liczbę ruchów. Wyobraźmy sobie bowiem takie dwie drogi. Moglibyśmy pójść pierwszą drogą, a potem wrócić drugą wykonując ruchy przeciwne w odwrotnym porządku. Tym sposobem od naturalnego ustawienia doszlibyśmy do niego z powrotem, a liczba ruchów byłaby sumą nieparzystej i parzystej, więc byłaby nieparzysta. Otóż to jest niemożliwe: nie można od jakiegoś ustawienia dojść znowu do niego przez nieparzystą liczbę ruchów. Bo każdy ruch przestawia jakąś parę: jeżeli jest ruch, który przestawia parę (3, 7) i robi z niej (7, 3), to musi być ruch przeciwny, który z pary (7, 3) robi (3, 7), a to dlatego, że jeżeli w badanym ustawieniu trójka była na

lewo od siódemki, a chcemy do niego wrócić, musimy skasować ruch, który przeniósł trójkę na prawo od siódemki; cokolwiek by się działo z trójką po tym skoku, nie może ona powrócić inaczej na swoje miejsce, jak przeskakując przez siódemkę z powrotem. To dotyczy wszystkich par: liczba ruchów, w których uczestniczy jakaś para, jest zawsze parzysta, a więc ogólna liczba ruchów jest parzysta. Przekonaliśmy się więc, że są ustawienia parzyste i nieparzyste; do jednych dochodzi się od ustawienia naturalnego parzystą, do drugich nieparzystą liczbą ruchów. Jeżeli jakieś ustawienie jest parzyste, to nie jest nieparzyste.

Wszystko, co wyżej powiedziano, odnosi się do ustawienia tabliczek w jeden rząd. W pudełku nie można wykonywać dowolnych ruchów. Wprawdzie możemy czytać liczby od lewego rogu górnego do prawego dolnego i uważać porządek tabliczek w pudełku za ustawienie, jednak teraz posunięcia polegają na przestawianiu pustego miejsca „16" z tabliczką sąsiednią, zresztą którąkolwiek. Jeżeli ta sąsiadka jest po lewej lub po prawej, to będzie to ruch w poprzednim znaczeniu, jak gdyby tabliczki stały rzędem. Jeżeli jednak przestawiamy szesnastkę z tabliczką nad nią lub pod nią, to tak jak gdybyśmy przestawili w ustawieniu rzędowym dwie tabliczki odległe o 4. Takie przestawienie wymaga 7 ruchów.

Aby rozwiązać zadanie przejścia od porządku (16) do (17), musimy w każdym razie doprowadzić tabliczkę „16" z powrotem do początkowego stanowiska w dolnym prawym rogu; musimy ją zatem posunąć tyle razy w lewo, co w prawo, i tyle razy w górę, co w dół. Będzie

więc parzysta liczba $2h$ posunięć poziomych i parzysta liczba $2v$ posunięć pionowych. Odpowiada to razem $2h$ plus $2v \cdot 7$ ruchom, czyli $2h + 14v$ ruchom, a ta liczba jest parzysta. Ale parzysta liczba ruchów prowadzi zawsze od parzystego ustawienia do parzystego, a od nieparzystego do nieparzystego (dlaczego?). Tymczasem ustawienie (17) jest nieparzyste, bo powstało z naturalnego przez jeden ruch — zamianę jedynki z dwójką, a ustawienie (16) jest parzyste, bo powstało z naturalnego bez żadnego ruchu; wobec tego zadanie przejścia (16)—(17) jest nierozwiązalne. Natomiast przejście od ustawienia parzystego do jakiegokolwiek parzystego lub od nieparzystego do nieparzystego jest zawsze rozwiązalne; niech czytelnik spróbuje sam to udowodnić.

Gra w „solitera" czyli w „samotnika" była modna przez kilka lat; gdy w roku 1879 ogłoszono jej teorię, wyszła z mody.

Wszystkie gry tu wspomniane i wiele innych mają coś wspólnego. Nie tylko końcówki szachowe, ale i „szubienica", i „wilk i owce" mają teorie, które uczą, jaki kolor wygra, byle grał poprawnie. Teoria mówi także, jak grać poprawnie. Remis w szachach pozornie przeczy temu, ale można z każdej pozycji remisowej dojść do rozstrzygnięcia, jeżeli się uzna za pobitego partnera, który przy powtórzeniu się jakiejś pozycji zagra tak samo, jak za pierwszym razem.

Jest ogólne twierdzenie, że wszystkie gry tego rodzaju, co wyżej opisane, są niesprawiedliwe lub czcze. Mówimy, że gra jest czcza, jeżeli poprawna taktyka obu stron prowadzi zawsze do remis. W niektórych grach nie ma

remis; nazwijmy je kategorycznymi. W innych można remis skasować przez dodatkowe reguły (jak na przykład przed chwilą podaliśmy). Nasza teza orzeka, że wszystkie gry kategoryczne są niesprawiedliwe.

Przyjmijmy, że zawsze zaczynają Białe; wtedy teza streszcza się w tym, że — tak, jak w grze w wilka i owce — określony kolor (mianowicie Białe) ma niezawodną metodę zwycięską; tak samo w każdej grze kategorycznej jest kolor zwycięski i wynik walki jest przesądzony, zanim się walka rozpocznie. Metoda zwycięska gwarantuje wygraną bez względu na to, jak zechce grać przeciwnik. Oczywiście tylko jeden kolor ma taką metodę. Jej odkrycie może być łatwe, jak w „wilku i owcach", lub trudne, jak w niektórych końcówkach szachowych, a nawet beznadziejnie odległe, jak w zwykłej grze w szachy, ale i tak istnieje kolor zwycięski i metoda zwycięska. (Zastosowanie do zwykłej gry w szachy wymaga reguły dodatkowej, jak wyżej podana, i uznania pata za przegraną unieruchomionego gracza).

Dla dowodu rozpatrzmy końcówkę szachową, która zapewnia Białym zwycięstwo w co najwyżej 4 posunięciach. Nazwijmy taką końcówkę EG_4. Jest jasne, iż istnieje początkowy ruch Białych taki, że cokolwiek nań odpowiedzą Czarne, wyniknie pozycja EG_3. Widać stąd, że w pozycji EG_4 Białe mają dobry ruch, to jest taki, który prowadzi do EG_3. Ale tak samo w pozycji EG_3 istnieje dobry ruch dla Białych, który prowadzi do EG_2, a potem ruch, który daje EG_1. Teraz Białe mają też dobry ruch: szach-mat! Naturalnie zła obrona Czarnych może skrócić partię: zamiast w 4, Czarne

mogą przegrać w 3 posunięciach; w każdym razie Białe mają zawsze serię dobrych ruchów, prowadzącą do zwycięstwa w 4 lub mniej niż w 4 posunięciach. Teraz wiadomo, co znaczy EG_n. Wszystkie EG_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ nazywamy zwycięskimi pozycjami dla Białych.

Niech teraz wszystkie 32 figury stoją gotowe do partii na szachownicy. Logika uczy, że są tylko dwie możliwości, z których każda wyłącza drugą: (I) — pozycja jest zwycięska dla Białych, (II) — pozycja nie jest zwycięska dla Białych. W przypadku pierwszym zwykła gra w szachy jest z góry przesądzona na rzecz Białych, bo pozycja początkowa jest EG_n. W drugim przypadku pozycja początkowa nie jest EG_n. Jeżeli tak, to na każdy początkowy ruch Białych R mają Czarne odpowiedź, która znowu stwarza pozycję nie będącą EG_n. Rzeczywiście, gdyby Białe miały taki ruch M, który po każdej odpowiedzi Czarnych daje im pozycję zwycięską, to już początkowa pozycja byłaby dla nich zwycięska, a wiemy, że tak nie jest, bo przyjęliśmy (II). Wobec tego na każdy ruch Białych R mają Czarne odpowiedź, która prowadzi do pozycji nie będącej EG_n. To rozumowanie odnosi się jednak i do tej nowej pozycji: znowu na każdy ruch R Białych mają Czarne obronę, która stwarza pozycję „nie-EG_n". Ponieważ Białe mogą wygrać tylko wtedy, gdy uda im się uzyskać pozycję EG_1, a to się nigdy nie stanie, jeżeli Czarne będą grały poprawnie, więc muszą wygrać Czarne, bo gra jest kategoryczna.

Nie wiemy, która ewentualność, (I) czy (II), zachodzi w szachach (przy regule usuwającej remis), ale wiemy, że jedna z nich i tylko jedna

zachodzi, co czyni z szachów grę niesprawiedliwą.

To samo rozumowanie odnosi się do warcabów, do halmy i do wielu innych gier. Jeżeli nie są kategoryczne, mogą być sprawiedliwe, ale wtedy są czcze. Nie wiemy, czy zwykłe szachy (bez reguły dodatkowej) są czcze, czy nie. Jeżeli nie są, są niesprawiedliwe, ale nie wiemy, który kolor w takim razie jest uprzywilejowany. Gdybyśmy to wiedzieli, to jeszcze moglibyśmy nie znać metody zwycięskiej, a gdybyśmy wiedzieli, że szachy są czcze, moglibyśmy nie wiedzieć, jakie metody gwarantują stronom remis.

Są gry innego rodzaju — takie, do których powyższa teoria się nie stosuje.

	0	00	000	
I	1	3	2	
II	2	3	1	
III	3	1	4	

(18)

Deska służąca do „szubienicy" da się użyć do takiej gry: Na desce (18) są wypisane raz na zawsze liczby — niektóre biało, inne czarno. Partner *B* (biały) pisze na karteczce 0,00 lub 000, partner *C* (czarny) pisze I,II lub III na innej, ale żaden z nich nie widzi, co pisze przeciwnik. Potem ujawniają karteczki

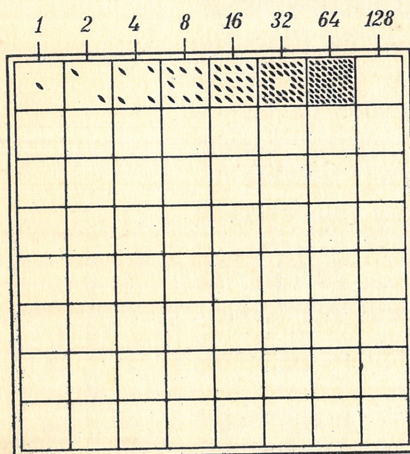
i przez to wyznaczają kolumnę i wiersz; liczba na przecięciu kolumny i wiersza oznacza, ile złotych ma zapłacić czarny partner *C* partnerowi białemu *B*, jeżeli jest biała; jeżeli zaś jest czarna, to oznacza, ile złotych należy się od białego *B* czarnemu partnerowi *C*. Osobliwość tej gry jest w tym, że nie jest ona „zamknięta". Wytłumaczymy to.

Przypuśćmy, że Biały zawsze pisze 00 i że Czarny już to spostrzegł grając z nim od dłuższego czasu. Najlepszą taktyką dla Czarnego będzie pisanie znaczka II, to mu bowiem zapewni wygraną 3 złotych w każdej partii. Po kilku grach Biały pozna ten nowy system przeciwnika i zmieni swój zwyczaj: zacznie pisać stale 0. Ta metoda zapewni mu wygraną 2 złotych w każdej partii, dopóki Czarny nie zdecyduje się na zmianę taktyki. Widać, że to przystosowywanie się wzajemne nie prowadzi żadnego z partnerów do jakiejś ustalonej metody.

W szachach jest inaczej. W problemacie dra Bergera rozwiązanie podane w tekście * jest najlepsze dla obu stron. Jeżeli Białe wiedzą, iż przeciwnik gra bezbłędnie, zaczną od ruchu H b1-b8; inaczej nie będą mogły liczyć na zwycięstwo w trzynastym posunięciu. Jeżeli Czarne wiedzą, że mają za przeciwnika idealnego szachistę, odpowiedzą ruchem G g1-c6; każda inna odpowiedź sprowadzi bowiem na nie mata przed trzynastym posunięciem. Takim sposobem walka rozegra się według „gry głównej", którą podaje tekst. W takiej grze metody obu partnerów są wzajemnie najlepsze. Istnienie „gry głównej" czyni grę zamkniętą.

* Porównaj też uwagę (13) na końcu książki.

Szachy, warcaby, halma, młynek, wilk i owce i niemal wszystkie gry polegające na kolejnych jawnych posunięciach — są zamknięte, bez względu na to, czy są czcze, czy niesprawiedliwe; natomiast gra (18) na dziewięciu kwadratach nie jest ani zamknięta, ani niesprawiedliwa, ani czcza: jest otwarta, sprawiedliwa i kategoryczna. Jest widoczne, że bierze się to z równoczesności posunięć.



(19)

Jest legenda, że bramin, który wynalazł szachy, zażądał od króla perskiego tyle pszenicy, by pokryć całą szachownicę (19) zaczynając od jednego ziarna na pierwszym polu, kładąc dwa na sąsiednim i zawsze na następnym dwa razy więcej niż na poprzednim polu, aż do ostatniego. Okazało się, że nie tylko spichrze szacha perskiego, ale wszystkie spichrze na świecie nie mają razem tyle pszenicy.

Bramin zażądał mianowicie w skromnej formie $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{63} = 2^{64} - 1$ ziarn. Jest to liczba dwudziestocyfrowa. Ma ona dzielniki. (Jakie?).

Gdyby złożyć dwie szachownice, a potem ująć z ostatniego pola drugiej jedno ziarnko, to na tym polu leżałoby ziarn $p = 2^{127} - 1$, czyli 170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727 ziarn. Ta liczba p nie ma dzielników; jest to *liczba pierwsza*. Ma ona 39 cyfr. Można udowodnić, że istnieje większa od niej liczba pierwsza, która też jest 39-cyfrowa, bez wskazania tej liczby. Niedawno stwierdzono, że liczba $180p^2 + 1$ jest pierwsza. Oto ona:

5 210 644 015 679 228 794 060 694 325
391 135 853 335 898 483 908 056 458
352 201 854 618 372 555 735 221.

Największą ze znanych dotąd liczb pierwszych jest $2^{2281} - 1$; tego 687-cyfrowego olbrzyma znalazła baterią elektronowa SWAC dnia 7 października 1952 r. (Jaka jest jego pierwsza cyfra a jaka ostatnia?).

Euklides podał dowód, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych. Udowodniono, że liczba $2^{257} - 1$ nie jest pierwsza, ale dotychczas nie znaleziono jej dzielników.

Można zrobić taki eksperyment z szachownicą; posmarować ją lepem, a potem rzucać na nią z wysoka ruchem siewcy po kilka ziarenek pszenicy, aż będzie ich razem na szachownicy 64. Oczywiście nie wszystkie pola będą jednakowo pokryte: niektóre zostaną puste, inne będą zawierały po jednym ziarnku, inne po dwa itd. Według rachunku prawdopodobieństwa można oczekiwać mniej więcej takiego wyniku: 24 pola zostaną puste, 24 będą miały po jednym ziarnku, 12 pól po dwa, 3 pola po trzy, 1 pole — cztery ziarnka. (Ścisły rachunek dałby ułamkowe liczby pól i wtedy suma iloczynów dałaby dokładnie 64 ziarnka).

Ten eksperyment będzie jeszcze ciekawszy, jeżeli narysujemy na mapie Europy środkowej szachownicę (o 64 polach), a potem zaznaczymy 64 największe miasta na pokrytym obszarze. Jeżeli wynik będzie zgodny z przewidywaniem, będzie to dowodem tego, że na rozmieszczenie miast wpływa bardzo wiele niezależnych czynników.

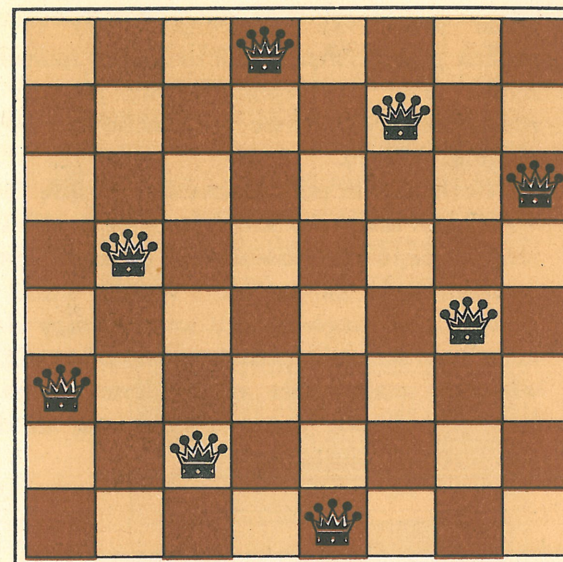
$$MEGA = \textcircled{2} = \boxed{\boxed{2}} = \triangle(\triangle 2) = \triangle 2^2 = \boxed{4^4} = \boxed{256} = \triangle 256 = \ldots$$

(20)

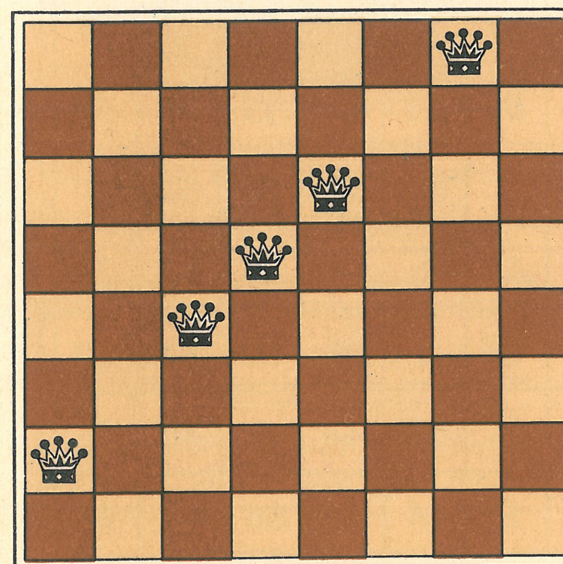
Łatwo pisać ogromne liczby. Takie giganty dadzą się określić bez trudności, gdy umówimy się (20) pisać $\triangle a$ zamiast a^a, $\boxed{a}$ zamiast „a w a trójkątach" i $\textcircled{a}$ zamiast „a w a kwadratach". Wtedy liczba MEGA = $\textcircled{2}$ będzie za wielka, by można jej przypisać sens fizykalny. Ostatni symbol czyta się jako „256 w 256 trójkątach" — widać dlaczego porzuciliśmy zwykły sposób pisania liczb. Niech czytelnik spróbuje wytłumaczyć liczbę MEDZON = $\textcircled{3}$

Szachownica dała wiele zagadek i gier. Można ustawić na niej 8 królowych tak (21), by żadna nie szachowała żadnej innej. Takich ustawień jest 92; można je wszystkie otrzymać z 12 istotnie różnych ustawień przez obroty i lustrzane odbicia szachownicy.

Można ustawić 5 królowych na szachownicy w taki sposób (22), żeby każde pole było szacho-



(21)



(22)

wane przez nie. Rozwiązań jest tu 4860; można je otrzymać z 638 ustawień istotnie różnych. Ten problemat da się jeszcze i tak rózwiązać, by królowe nie szachowały się wzajemnie. (Jak?).

Niech pewne pola szachownicy będą zaminowane, i to tak, żeby król nie mógł dojść do prawego brzegu szachownicy, z jakiegokolwiek by wyszedł pola na lewym. Wtedy wieża zdoła przejść z górnego brzegu szachownicy do dolnego po samych polach zaminowanych. Tę własność mają także prostokątne szachownice (o $m \cdot n$ polach); jest ona oczywista, ale dowód nie jest natychmiastowy.

(23)

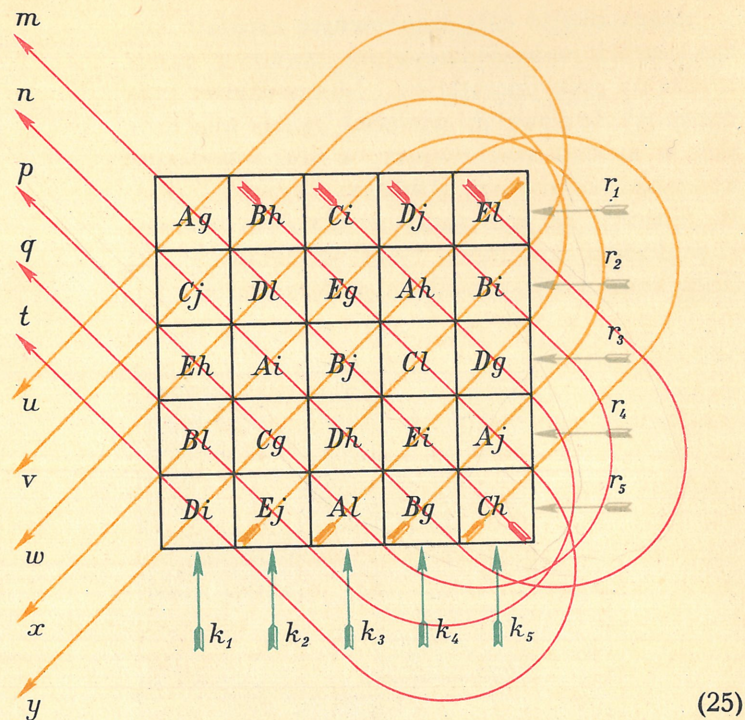
50	11	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	39	16
48	7	60	1	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	19	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

Można obejść całą szachownicę krokiem konia i wrócić w sześćdziesiątym czwartym posunięciu na pole początkowe. Można nawet zrobić to tak, że powstały wielobok będzie miał środek w środku szachownicy, a liczby podające kolejność pól utworzą „kwadrat magiczny" (23), to znaczy, że ich sumy w każdym wierszu i w każdej kolumnie będą jednakowe: 260 (inna suma nie jest możliwa — dlaczego?).

A	*B*	*C*	*D*	*E*
C	*D*	*E*	*A*	*B*
E	*A*	*B*	*C*	*D*
B	*C*	*D*	*E*	*A*
D	*E*	*A*	*B*	*C*

(24)

Wielki matematyk Euler interesował się „konikówkami" i podobnymi zagadkami, np. zagadnieniem 36 oficerów: Jak ustawić delegację sześciu pułków, z których każdy wysyła pułkownika, podpułkownika, majora, kapitana, porucznika i podporucznika — tak, żeby w żadnym rzędzie ani w żadnej kolumnie nie powtarzały się pułki ani rangi? To zadanie jest nierozwiązalne, ale łatwo ustawić 25 oficerów z pięciu pułków i pięciu rang. Na rysunku (24) różne kolory oznaczają pułki, a litery — rangi.



(25)

Zabawka Eulera ma dziś praktyczne zastosowanie: używają tak zwanych kwadratów grecko-łacińskich do badań rolniczych. Aby porównać wpływ różnych sposobów uprawy na różne odmiany jakiejś rośliny, dzielimy pole na 25 poletek i oznaczamy (25) literami *A*, *B*, *C*, *D*, *E* pięć różnych odmian; litery *g*, *h*, *i*, *j*, *l* przedstawiają pięć różnych nawozów. Plan pokazuje wszystkie możliwe kombinacje 5 odmian roślin z pięcioma nawozami: każde poletko odpowiada innej kombinacji.

Jeżeli każdy rząd ma inny stopień wilgotności, to — jak uczy plan — każda odmiana występuje w połączeniu z każdym stopniem wilgotności.

Na przykład najniższa wilgotność r_1 występuje z *A*, *B*, *C*, *D* i *E*, a to samo sprawdza się przy innych stopniach wilgotności r_2, r_3, r_4 i r_5. Ale wilgotność r_1 występuje ze wszystkimi rodzajami nawozów, a to samo można powiedzieć o r_2, r_3, r_4 i r_5. Kolumny odpowiadają pięciu różnym sposobom uprawy ziemi; widać, że w kolumnie k_1 napotykamy wszystkie odmiany, wszystkie nawozy i wszystkie wilgotności.

Mamy jeszcze dwa układy przekątne: *m*, *n*, *p*, *q*, *t* i *u*, *v*, *w*, *x*, *y*. Pierwszy układ odpowiada pięciu różnym czasom siewu, drugi — pięciu różnym czasom zbioru. Na przykład ukośna linia *m* przecina każdy rząd, każdą kolumnę, wszystkie duże litery *A*-*E*, wszystkie małe litery *g*-*l* i wszystkie linie układu *u*-*y*. Jeżeli więc obliczymy średni plon *m* z pięciu poletek oznaczonych tą literą, będziemy mogli powiedzieć, że wyeliminowaliśmy różnice uprawy i odmiany, ale nie wpływ daty siewu, która jest jednakowa dla tych pięciu poletek (na przykład 1 marca). Gdy obliczymy średni plon *A* z pięciu poletek oznaczonych tą literą, wyrugujemy wszystkie różnice z wyjątkiem odmiany.

Te uwagi wynikające bezpośrednio z obejrzenia kwadratu grecko-łacińskiego prowadzą do takiej metody: Niech średni plon z poletka będzie *M*; to *M* oblicza się dzieląc przez 25 plon z całego pola. Niech średni plon z poletek nazwanych jakąś literą oznacza się tą literą; oblicza się go sumując plony z pięciu poletek nazwanych tą literą i dzieląc sumę przez 5. Teraz możemy obliczyć taką sumę:

$$(M-A)^2+(M-B)^2+(M-C)^2+$$
$$+(M-D)^2+(M-E)^2$$

i podobne sumy dla innych grup liter:

$(M-g)^2+(M-h)^2+(M-i)^2+(M-j)^2+(M-l)^2$,

$(M-r_1)^2+(M-r_2)^2+(M-r_3)^2+(M-r_4)^2+(M-r_5)^2$

i tak dalej. Następna czynność — to porównanie tych sum. Jeżeli na przykład pierwsza suma jest większa niż druga, wolno nam wnosić, że wpływ odmiany na plon jest większy niż wpływ nawozu.

Ale ścisła ,,analiza wariancji'' (bo tak się nazywa ta metoda) jest bardziej skomplikowana, gdyż uwzględnia jeszcze kwestię, czy różnice sum są takie duże, że nie można ich przypisać przypadkowym odchyleniom.

Ciekawe są takie gry jak totalizator, w którym trzeba znać się nie tylko na koniach, ale także na ludziach, bo jeżeli stawia się na konia bardzo dobrego, którego zalety są wszystkim znane, to nawet, gdy ów koń przyjdzie pierwszy do mety, wygra się mało albo nic, bo niemal wszyscy gracze na niego postawią. Należy więc wybrać takiego konia, którego zalety się dostrzegło — jeżeli się wie przy tym, że większość graczy o nich nie wie.

Można urządzić sobie totalizatora bez koni i w ogóle bez żadnych przyborów. Niech osoby zebrane w pokoju złożą po złotówce do puli i niech każdy w sekrecie napisze na kartce wysokość pokoju z dokładnością do milimetra. Zbiera się kartki, oblicza średnią liczb napisanych i przyznaje się zawartość puli tej osobie, której ocena wysokości pokoju jest najbliższa owej średniej, ... a wysokości pokoju wcale się nie mierzy! Właściciel pokoju, który zna prawdziwą jego wysokość, nie ma większych szans niż jego goście. W tej grze znajomość ludzi, ich sposobu widzenia i myślenia jest nie mniej ważna niż w totalizatorze.

II

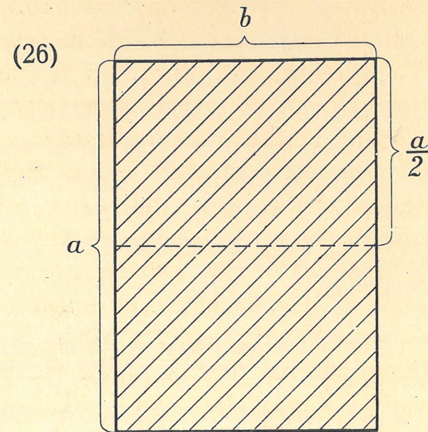
PROSTOKĄTY LICZBY I TONY

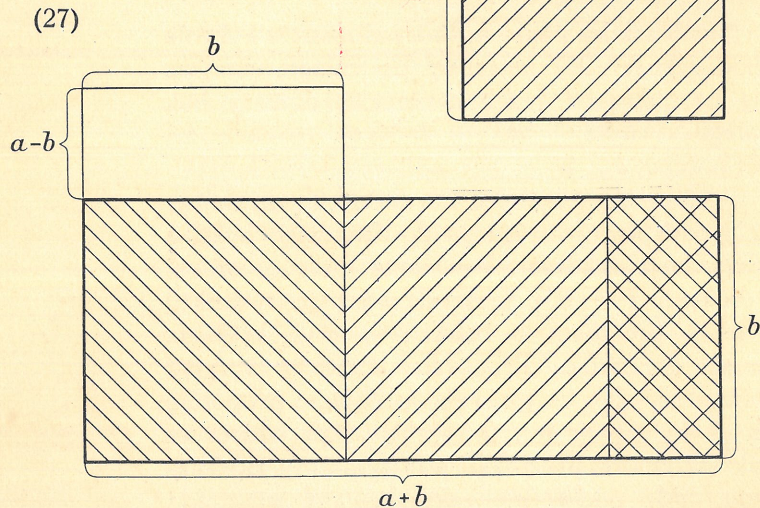
Niech arkusz papieru, który złożony we dwoje daje arkusz (26) podobny do całego, nazywa się normalnym. Jeżeli a oznacza dłuższy bok całego arkusza, b zaś — krótszy, to zachodzi proporcja $a : b = b : a/2$.

Weźmy dwa arkusze normalne i przyklejmy (27) podstawę b drugiego do dłuższego boku a pierwszego arkusza. Powstanie duży prostokąt o bokach $a + b$, b (zakreskowany na rysunku) i mały prostokąt o bokach b, $a - b$ (biała część rysunku). Proporcja $a : b = b : a/2$ daje $a^2 = 2b^2$, co pozwala sprawdzić proporcję $(a + b) : b = b : (a - b)$. Stąd widać, że zakreskowany prostokąt jest podobny do białego. Ale podwójnie zakreskowany prostokąt przystaje do białego. Wobec tego zakreskowany prostokąt jest podobny do podwójnie zakreskowanej swojej części.

Nazwijmy kształt zakreskowanego arkusza hipernormalnym. Wykazaliśmy, że odcinając od hipernormalnego arkusza dwa kwadraty pozostawiamy znowu arkusz hipernormalny jako resztę.

Przypuśćmy, że mamy arkusz normalny o bokach a cm i b cm, przy czym a i b są całkowite. Z takich dwóch arkuszy zlepimy arkusz hipernormalny w sposób przed chwilą opisany;



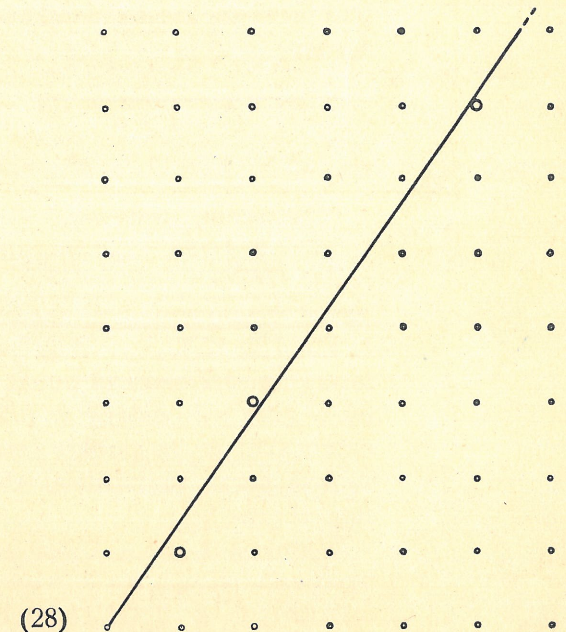


jego boki mierzone w centymetrach będą liczbami całkowitymi. Niech p wyraża dłuższy, a q — krótszy bok. Odcinając dwa kwadraty otrzymujemy znowu arkusz hipernormalny; jego boki będą q i $p - 2q$ centymetrów. Jest oczywiste, że te liczby też są całkowite i że nowy długi bok jest krótszy niż połowa dawnego długiego boku. Postępując tak dalej otrzymujemy coraz to mniejsze arkusze hipernormalne o bokach całkowitych. Ponieważ jednak są to liczby całkowite i coraz mniejsze, więc przy

każdym kroku tracimy co najmniej centymetr i po co najwyżej p krokach długi bok zniknie. Ta sprzeczność dowodzi, że nie ma arkuszy normalnych o bokach wyrażających się całkowitymi liczbami centymetrów. Ale jednostka jest obojętna: dowód jest ważny tak samo dla centymetrów, jak dla cali, milimetrów lub mikronów.

Stosunek boków arkusza normalnego jest $\sqrt{2}$. Jest to liczba, która pomnożona przez siebie daje 2. Wykazaliśmy właśnie, że $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną, to znaczy, że nie jest stosunkiem dwóch liczb całkowitych a/b.

Ten wynik możemy uwidocznić na „kracie liczb całkowitych" (28). Jest to ustawienie



punktów na wzór tyk chmielowych w rzędy i szeregi o równych odstępach. Rysując linie proste wzdłuż rzędów i wzdłuż szeregów otrzymamy szachownicę pokrywającą całą płaszczyznę. Przyłożywszy normalny arkusz do lewego dolnego rogu rysunku nakreślmy prostą wzdłuż przekątnej arkusza; jest to ukośna linia na rysunku. Widz patrzący wzdłuż niej nie napotka wzrokiem żadnej tyki chmielowej. (Dlaczego?).

Liczbę $\sqrt{2}$ można napisać tak:

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}$$

Jeżeli bowiem ten ułamek nazwiemy x, to pod pierwszą kreską ułamkową widzimy $1 + x$, a więc

$$x = 1 + \frac{1}{1+x}, \quad x - 1 = \frac{1}{x+1},$$

$$x^2 - 1 = 1, \quad x^2 = 2, \quad x = \sqrt{2}.$$

Przybliżone wartości $\sqrt{2}$ są wobec tego: 1, 3/2, 7/5, 17/12, ...; otrzymuje się je, ograniczając łańcuch x do jednego, dwóch, trzech itd. ogniw. Nachylenie linii ukośnej jest $\sqrt{2}$. Ułamki 1, 3/2, 7/5, 17/12, ... dają pewne punkty kratowe: np. 3/2 oznacza punkt odległy o 3 odstępy w górę i 2 odstępy w prawo od rogu. Widzimy (28), że te punkty (małe kółeczka na rysunku) coraz to bardziej zbliżają się do prostej ukośnej.

Wiemy już, że $\sqrt{2}$ nie jest stosunkiem a/b liczb całkowitych a i b, więc wiemy, że nie ma całkowitych a, b takich, żeby było $a^2 = 2b^2$.

Innymi słowy: dwóch jednakowych oddziałów wojska ustawionych w dwa kwadraty nie można uszykować razem w kwadrat. Jeżeli jednak pozwolimy na błąd o jednego żołnierza mniej lub o jednego więcej, możemy to zrobić; właśnie ułamki przed chwilą znalezione dają takie ustawienia:

$$2^2 + 2^2 = 3^2 - 1, \quad 5^2 + 5^2 = 7^2 + 1,$$
$$12^2 + 12^2 = 17^2 - 1.$$

Wszystkie potrzebne ułamki uzyskamy z 1/1: suma $1 + 1 = 2$ daje następny mianownik, a suma $1 + 2 = 3$ daje licznik; $3 + 2 = 5$ jest trzecim mianownikiem, a $2 + 5 = 7$ trzecim licznikiem i tak dalej:

$$\frac{1}{1}\;\frac{3}{2}\;\frac{7}{5}\;\frac{17}{12}$$

Reguła arytmetyczna jest taka: Jeżeli p/q jest ułamkiem serii, a P/Q — następnym, to

$$Q = p + q, \quad P = q + Q = p + 2q.$$

Przypuśćmy, że ułamek p/q daje uszykowanie w kwadraty z błędem ± 1:

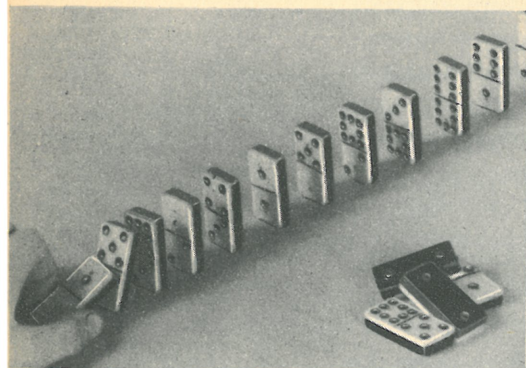
$$p^2 - 2q^2 = \pm 1.$$

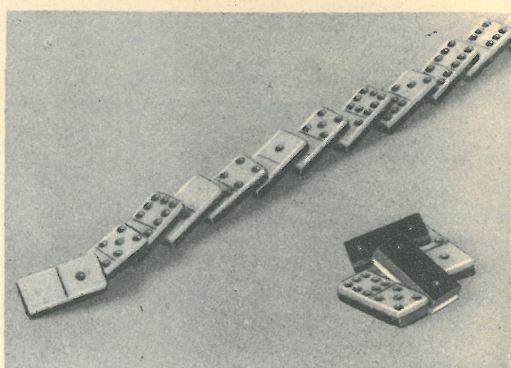
Łatwo widać, że wtedy i P/Q daje takie uszykowanie. Rzeczywiście jest

$$P^2 - 2Q^2 = (p + 2q)^2 - 2(p + q)^2 =$$
$$= p^2 + 4pq + 4q^2 - 4pq - 2p^2 - 2q^2 =$$
$$= 2q^2 - p^2 = \pm 1.$$

Ale ułamek 1/1 jest, jak łatwo sprawdzić, dobry: $1^2 - 2 \cdot 1^2 = -1$. Stąd wynika, że następny ułamek serii jest dobry — i tak dalej; wszystkie ułamki są dobre i dają szukane szyki kwadratowe. Powiedzieliśmy to już wcześniej, ale teraz mamy dowód.

Nasze rozumowanie przypomina dziecinną zabawę w domino (29): ustawia się je rzędem





(29) (30)

i przewraca pierwsze; wtedy (30) wszystkie się przewrócą. By to przewidzieć, nie trzeba wiedzieć nic ponadto, że obalono pierwszą deseczkę i że domina są tak ustawione, iż upadek któregokolwiek domina obala następne. Zasada, która mówi, że sztuka z dominami musi się wtedy udać, nazywa się indukcją matematyczną.

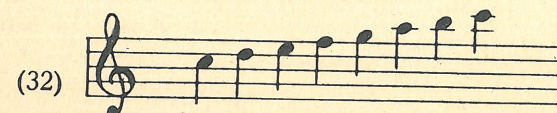
Liczby wymierne i niewymierne łączą się z problematem gamy w muzyce (31). Niewymiernymi nazywamy takie liczby, co jak $\sqrt{2}$ nie wyrażają się jako stosunek a/b liczb całkowitych a, b. W gamie *c*-dur odstępy *c-d*, *d-e*, *f-g*, *g-a*, *a-h* (32) mają być równe (całotonowe), odstępy *e-f* i *h-c* od tamtych dwa razy mniejsze, (półtonowe). Dawno już zbadano na monochordzie najprostsze akordy. Okazało się, że współbrzmienie jest tym lepsze, im mniejsze są liczby całkowite wyrażające stosunek drgań. Wysokie

c ma dwa razy tyle drgań na sekundę, co niskie *c*, zatem oktawa wyraża się stosunkiem 2 : 1. Stosunek 3 : 2 daje kwintę (*g* : *c*), 4 : 3 daje kwartę (*f* : *c*), 5 : 4 wielką tercję (*e* : *c*), 6 : 5 małą tercję (*f* : *d*). Odległość *c-c* wynosi 12 półtonów = 4 małe tercje, a więc powinno być $(6/5)^4 = 2$. Tymczasem ułamek po lewej stronie jest 2,074, więc za duży. Na to nie ma rady: nie można tak dobrać wysokości tonów, by wszystkie akordy wyrażały się stosunkami liczb całkowitych i nie zmieniały się wraz z tonacją.

(31)



Między *f* a *g* leży *fis* (czarny klawisz w samym środku oktawy); od *c* do *fis* i do wysokiego *c*

(32)


jest ten sam odstęp: zwiększona kwarta. Jeżeli x oznacza stosunek drgań *fis* : *c*, to musi być $x \cdot x = 2$, a więc $x = \sqrt{2}$, a to jest liczba niewymierna.

Fortepian ma skalę temperowaną: wszystkie odstępy półtonowe są na nim równe, a więc teoretycznie odpowiadają stosunkowi drgań $\sqrt[12]{2}$, ale za to akordy nie są czyste. Toteż skrzypek idąc za słuchem, odbiega od fortepianu, chociaż przed koncertem dostroił do niego skrzypce: u niego zwiększona kwarta jest 7 : 5, więc odstępuje od temperowanej zwiększonej kwarty tak, jak punkt 7/5 na kracie liczb (28) odbiega od linii ukośnej.

Nieskończony ułamek wyrażający $\sqrt{2}$ nie jest najprostszy. Najprostszym ułamkiem nieskończonym jest oczywiście

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ddots}}}$$

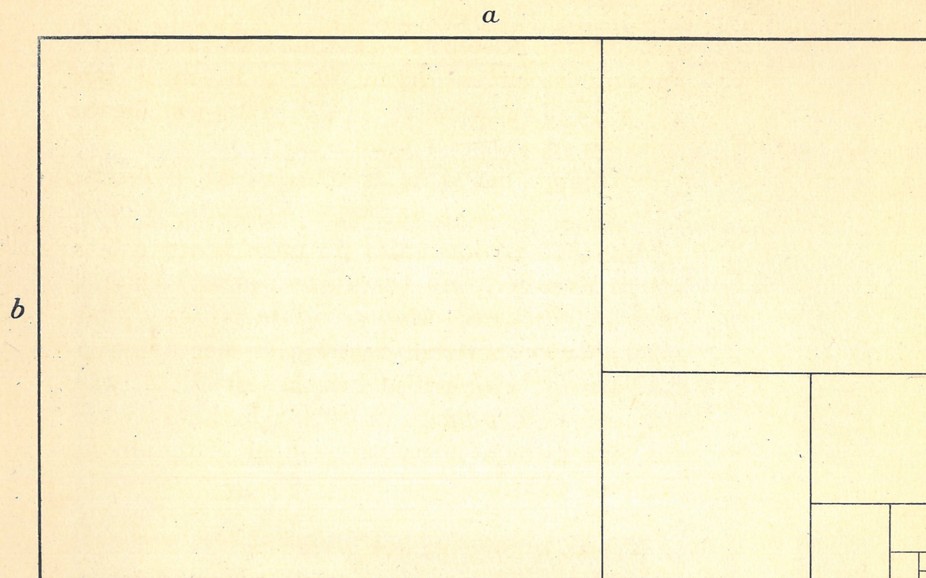
Niech x będzie wartością tego ułamka. Pod pierwszym licznikiem (najwyższą jedynką) stoi taki sam ułamek, jak całe wyrażenie, więc jest

$$x = 1 + \frac{1}{x}, \quad x^2 - x = 1,$$

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1) = 1{,}618\ldots$$

Nazwijmy „złotym" prostokąt (33), który po odcięciu kwadratu pozostawia resztę podobną do całości. Nazwijmy jego boki a, b. Będzie

$$a : b = b : (a - b),$$
$$a^2 - ab = b^2,$$
$$(a/b)^2 - (a/b) = 1.$$



(33)

Ułamek a/b spełnia to samo równanie, co x; wobec tego jest równy $(\sqrt{5} + 1)/2$. Ta liczba jest niewymierna (dlaczego?), więc żadne całkowite a, b nie dadzą złotego prostokąta. Możemy jednak postąpić jak z $\sqrt{2}$: obcinając nieskończony ułamek kolejno po pierwszym, drugim, trzecim itd. znaku plus otrzymujemy

$$1/1,\ 2/1,\ 3/2,\ 5/3,\ 8/5,\ 13/8,\ \ldots$$

Te ułamki coraz bardziej zbliżają się do złotej liczby 1,618... Liczniki 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... nazywają się liczbami Fibonacciego. Otrzymuje się je przez kolejne dodawanie rozpoczynając od $1 + 1$:

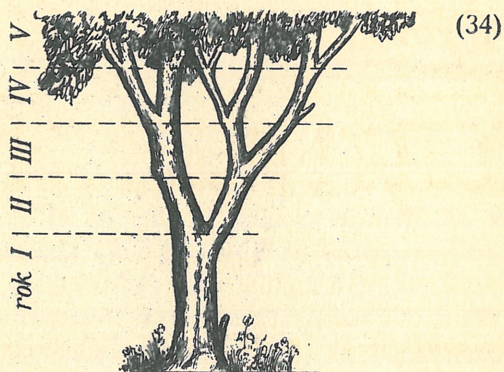
$$1 + 1 = 2, \quad 1 + 2 = 3, \quad 2 + 3 = 5,$$
$$3 + 5 = 8, \quad 5 + 8 = 13, \ \ldots$$

n-ta liczba Fibonacciego jest

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}\right)^n\right\}.$$

Można to udowodnić indukcją matematyczną. (Jak?).

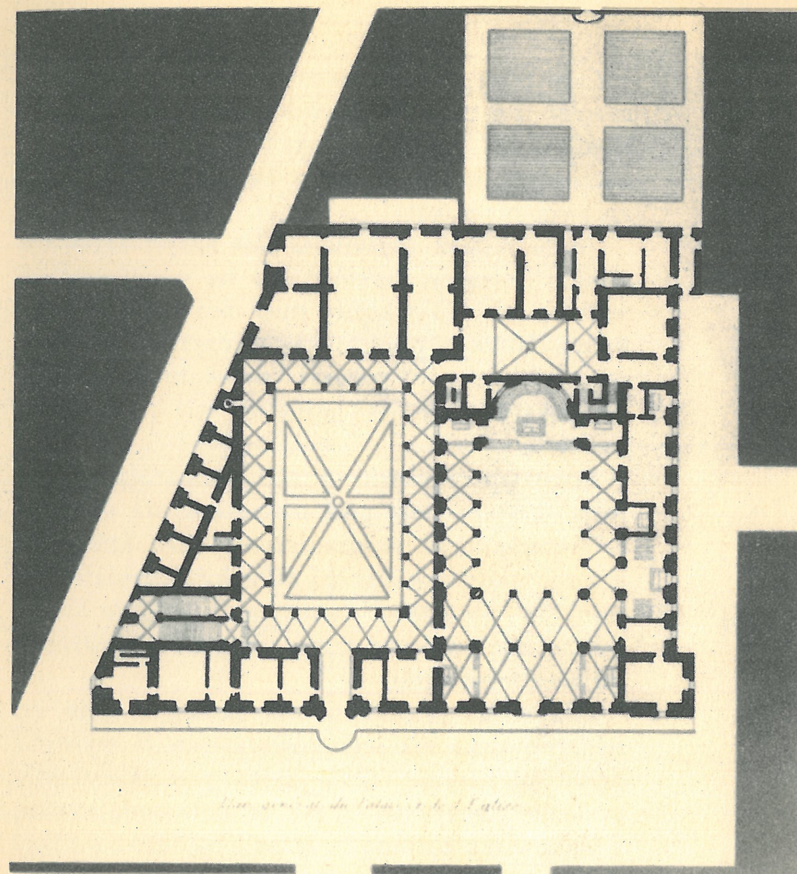
Gdy pień (34) puszcza po roku nową gałąź, potem zawsze przez rok wypoczywa i dopiero po następnym roku znowu wydaje gałąź — i tak samo zachowuje się każda gałąź, to w pierwszym roku mamy tylko pęd główny, w drugim 2 gałęzie, w następnym 3, potem 5, 8, 13, ... jak w ciągu Fibonacciego.



(34)

Dziedzińce pałacu (35), otoczone kolumnadami, mają stosunek boków bliski złotej liczby. Złotym nazywa się taki podział odcinka, że całość jest w tym samym stosunku do większej części, co większa część do mniejszej. Wtedy te stosunki są równe liczbie złotej. (Dlaczego?).

Możemy złoty prostokąt (33) rozłożyć na nieskończenie wiele kwadratów odcinając od


(35)

niego kwadrat, od pozostałego prostokąta kwadrat itd. Na rysunku widać, że wierzchołki kwadratów leżące wewnątrz dużego prostokąta tworzą dwie linie proste: jedna jest przekątną dużego prostokąta, druga — przekątną prostokąta pozostałego po odcięciu kwadratu. (Dlaczego?). Ten rozkład na kwadraty jest geometrycznym odpowiednikiem ułamka nieskończonego z samych jedynek.

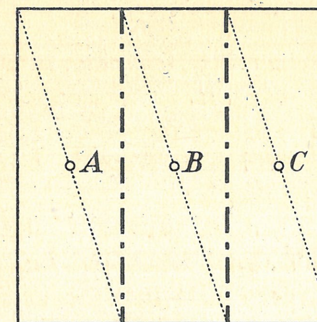
Gdy trzej jeźdźcy pilnują trzody na kwadratowym pastwisku, prawdopodobnie podzielą kwadrat na trzy prostokąty (36) i staną w środkach prostokątów, a każdy będzie uważał tylko na swój prostokąt.

Jeżeli jednak pasterz *C* jest sprytniejszy od swoich kolegów, namówi ich na nowy podział — tak, żeby (37) każdy miał ten sam dystans do najdalszego punktu swojej części. Ten dystans jest równy połowie przekątnej nowych prostokątów, ale jest mniejszy niż w dawnym podziale.

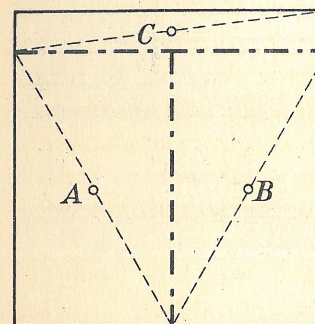
Po pewnym czasie *A* i *B* zorientują się, że mają większe pola pod nadzorem niż *C* i zaproponują nowe rozgraniczenie (38), które nie zmieni stanowisk ani też odległości najdalszych punktów, ale spełni słuszny warunek, że każdy punkt ma podlegać temu pasterzowi, któremu do niego najbliżej.

Ale wciąż jeszcze *C* ma mniejsze pole do nadzorowania niż jego towarzysze. *B* wymyśli nowe ulepszenie (39), które powiększy pole podległe pasterzowi *C*, tak że pola będą równe, a stanowiska zostaną te same i najdalsze punkty się nie zmienią.

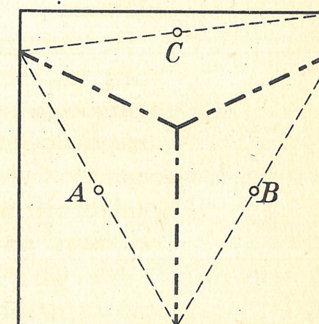
Gdy ten plan przyjęto, *A* spostrzega, że jego warunek najbliższego pasterza został naruszony. Ale *C* ma na to radę: pokazuje (40), iż wystarczy, by *A* i *B* przesunęli swoje stanowiska, a bez zmiany granic warunek najbliższego będzie uratowany. *A* i *B* usłuchali rady, ale wkrótce odkryli, że mają do swoich najdalszych punktów dalej niż *C* do swojego. W końcu wszyscy trzej zgodzili się na najdawniejszy podział — na jednakie prostokąty.



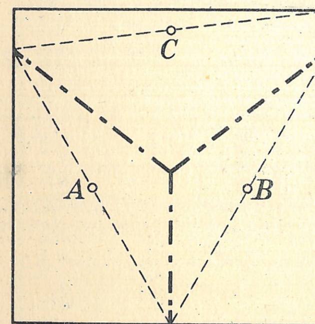
(36)



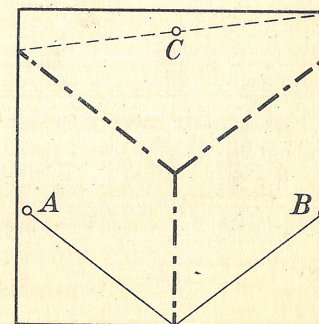
(37)



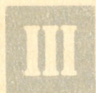
(38)



(39)



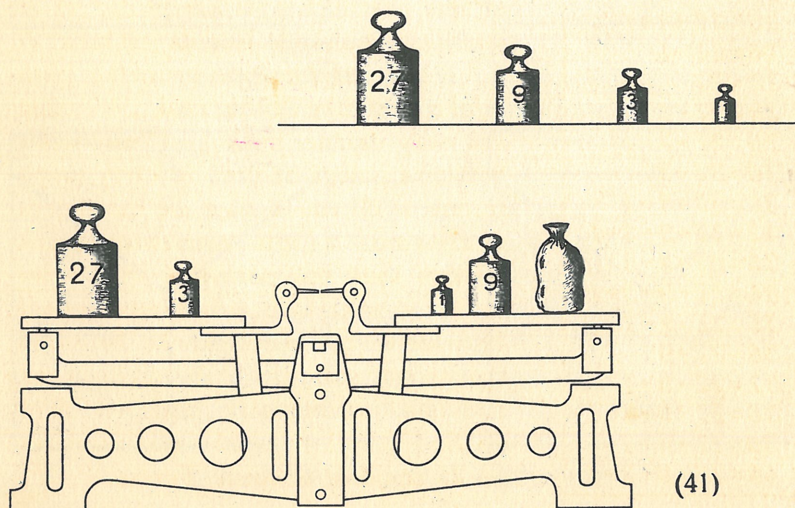
(40)



WAŻENIE
MIERZENIE
SPRAWIEDLIWY PODZIAŁ

Powróćmy na chwilę do szachownicy (19), na której w pierwszym rzędzie leży 1, 2, 4, . . ., 128 ziarn. Na pierwszym i drugim polu razem leżą 3 ziarna, na pierwszym i trzecim 5, na drugim i trzecim 6 — itd. Widać, że przez sumowanie można z ośmiu liczb uzyskać wszystkie liczby od 1 do 255.

Do ważenia od 1 do 40 dkg wystarczą cztery ciężarki, jeżeli wolno je kłaść na obie szale (41).



(41)

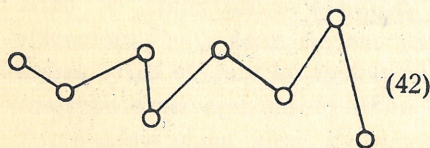
1=1
2=3-1
3=3
4=3+1
5=9-3-1
6=9-3
7=9-3+1
8=9-1
9=9
10=9+1
11=9+3-1
12=9+3
13=9+3+1
14=27-9-3-1
15=27-9-3
16=27-9-3+1
17=27-9-1
18=27-9
19=27-9+1
20=27-9+3-1
21=27-9+3
22=27-9+3+1
23=27-3-1
24=27-3
25=27-3+1
26=27-1
27=27
28=27+1
29=27+3-1
30=27+3
31=27+3+1
32=27+9-3-1
33=27+9-3
34=27+9-3+1
35=27+9-1
36=27+9
37=27+9+1
38=27+9+3-1
39=27+9+3
40=27+9+3+1

To odpowiada rozwijaniu liczb według podstawy 3. Wszystkie liczby od — 40 do 40 (pomijając zero) można zatem napisać jako $\pm$ 27 $\pm$ 9 $\pm$ 3 $\pm$ 1 używając jednej lub więcej spośród liczb 1, 3, 9, 27 z odpowiednimi znakami.

To pozwala na sztuczkę ze zgadywaniem imion. Pisze się 80 imion żeńskich i numeruje od — 40 do 40. Przygotowuje się cztery karty; na pierwszej po obu stronach namalowana jest brunetka, na drugiej blondynka, na trzeciej szatynka, na czwartej ruda. Obrazki różnią się kolorem oczu: z jednej strony karty jest on niebieski, z drugiej czarny. Jeżeli w spisie imion Teresa ma numer — 25, to ponieważ — 25 = = — 27 + 3 — 1, piszemy to imię trzy razy: na karcie brunetek po stronie niebieskich oczu, na karcie szatynek po stronie czarnych i na karcie rudych po stronie niebieskich. Reguła jest taka: 27, 9, 3, 1 oznaczają kolejno brunetkę, blondynkę, szatynkę i rudą, znak „+" oznacza oczy czarne, znak „—" niebieskie. Sztuczka polega na tym, że karty zaopatrzone w 80 imion daje się niewtajemniczonemu, a spis zachowuje sztukmistrz: każe mu pomyśleć imię i wyszukać je w kartach; gdy tamten powie, że może to być niebieskooka brunetka, czarnooka szatynka lub niebieskooka rudynka, sztukmistrz doda w myśli — 27 + 3 — 1 = — 25 i pod numerem — 25 znajdzie w spisie Teresę.

Gdy trzeba porównywać przedmioty na wadze bez ciężarków, można tylko orzec, który z dwóch jest cięższy. Jak to zrobić, gdy jest ich więcej, a wolno je porównywać tylko parami? Łatwo znaleźć najcięższy porównując naprzód dwa przedmioty, potem cięższy z tej pary z trzecim przedmiotem, cięższy znowu z czwartym itd. Dla n przedmiotów potrzeba tym sposobem $n - 1$ ważeń, by znaleźć najcięższy.

Tak samo jest z turniejami tenisowymi: żeby znaleźć najlepszego spośród n graczy, wystarczy $n - 1$ meczów. Ale mniej niż $n - 1$ nie wystarczy. Rzeczywiście mistrz musi być porównany z każdym graczem albo bezpośrednio (przez wynik meczu), albo pośrednio (przez wyniki łańcucha meczów). Niech punkty na płaszczyźnie oznaczają graczy, a linie łączące punkty niech wyobrażają mecze: mistrz musi być połączony z każdym graczem linią prostą lub łamaną i wskutek tego wszystkie n punktów będą połączone pośrednio lub bezpośrednio. Otóż jest widoczne (42), że potrzeba co najmniej $n - 1$ linij do połączenia n punktów.


(42)

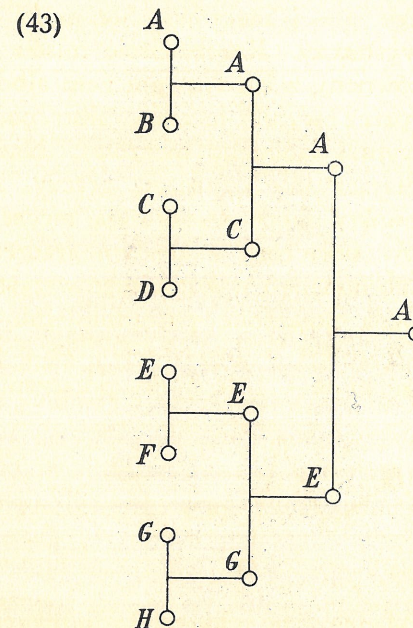
Możemy to udowodnić indukcyjnie *: do połączenia 2 punktów potrzeba z pewnością jednej linii; jeżeli potrzeba $n - 1$ linij do połączenia n punktów, a chcemy dodać $(n + 1)$-szy punkt, to ten nowy punkt wymaga linii, która by go

* Porównaj (29—30).

łączyła z dawnymi, więc razem będzie koniecznie potrzeba n linij do połączenia $n + 1$ punktów.

Turnieje rozgrywa się zwykle sposobem puharowym*: grupuje się graczy w pary, zwycięzcy pierwszej rundy tworzą nowe pary, co daje drugą rundę i tak dalej, aż finał rozstrzygnie o mistrzostwie. Tak więc na przykład (43), gdy jest 8 zawodników, mamy 4 mecze w pierwszej rundzie, 2 w drugiej i 1 w trzeciej, razem 7 meczów. Tej liczby nie można zmniejszyć, jak już pokazano.

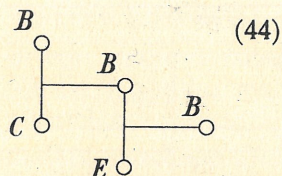
(43)



Jest zwyczaj dawania drugiej nagrody finaliście, tzn. graczowi, który przegrał w ostatniej

* Pisownia wyrazu *puhar* utrzymana na życzenie autora (przyp. red.).

rundzie. Ten system jest oczywiście niesprawiedliwy, bo ten gracz (E) nie był porównany ani bezpośrednio, ani pośrednio z graczami B i C, którzy zostali pobici rzez pmistrza i dlatego nie doszli do ostatniej rundy. W turnieju 8 graczy liczba graczy, którzy ulegli mistrzowi, jest 3. Dodatkowy turniej (44) z dwóch meczów jest potrzebny do wyznaczenia najlepszego spośród tej trójki. Zawsze wystarcza $n - 1 + [\log_2 (n - 1)]$ meczów do wyznaczenia dwóch najlepszych spośród n współzawodników. Na ogół ta liczba meczów nie da się zmniejszyć.



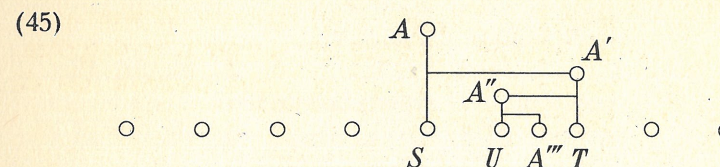
(44)

„Na ogół" znaczy tutaj, że nie ma metody, która by w każdym przypadku wyznaczała dwóch najlepszych graczy z mniejszej liczby meczów, niż określa formuła wyżej podana. Wprawdzie może się zdarzyć, że przypadkiem gracze znaleźli się na liście w porządku odpowiadającym ich sile; jest tylko jeden kort i kierownik turnieju każe grać parze A-B, a gdy B wygra, każe mu grać przeciw C, wygrywa C ... itd. Po $n - 1$ meczach mamy nie tylko najlepszego gracza N i drugiego M, ale całą klasyfikację $N, M, L, \ldots, C, B, A$. Ale to nie jest argument za metodą łańcuchową, a przeciw puharowej (ulepszonej turniejem dodatkowym), gdyż tylko przypadek skrócił turniej: gdyby wyniki gier były inne, system

łańcuchowy mógłby przedłużyć turniej. Natomiast przy ulepszonym systemie puharowym nigdy turniej nie przekroczy liczby ujętej w formułę.

Aby uszeregować przedmioty ważeniem bez ciężarków (lub sklasyfikować graczy na podstawie gier parami), można tak postąpić: Przypuśćmy, że uszeregowaliśmy (45) kilka przed-

(45)



miotów i chcemy znaleźć miejsce między nimi dla nowego przedmiotu. Szukamy naprzód przedmiotu środkowego S, to znaczy tego, który ma tyle przedmiotów powyżej, co poniżej; gdy liczba przedmiotów jest parzysta, miejsce środkowe jest puste, ale wtedy obydwa przedmioty przedzielone tym miejscem nazywamy środkowymi. Następnie porównujemy nowy przedmiot A ze środkowym S (lub z którymkolwiek z dwóch środkowych). Jeżeli A okaże się cięższy, porównujemy go ze środkowym górnego półszeregu, jeżeli lżejszy — ze środkowym dolnego i postępujemy dalej w ten sposób, aż w końcu A znajdzie miejsce A''' między dwoma sąsiadami U, T pierwotnego szyku.

Zacznijmy od dwóch przedmiotów: aby je ustawić, trzeba jednego ważenia (bez tego nie można by wstawić następnego przedmiotu); żeby wstawić trzeci, potrzeba co najwyżej dwóch ważeń; aby wstawić czwarty przedmiot między

trzy już ustawione, porównujemy go ze środkowym; a potem, jeżeli się okaże cięższy — z ciężarem skrajnym, jeżeli lżejszy — z lżejszym. Razem zawsze dwa ważenia. To daje taką tabliczkę:

Aby wstawić nowy przedmiot między
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...
już ustawionych przedmiotów, wystarcza ważeń:
1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, ...
A zatem, aby ustawić
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...
przedmiotów, wystarcza ważeń:
0, 1, 3, 5, 8, 11, 14, 17, 21, 25, 29, 33, ...

Wzór dla n przedmiotów jest:

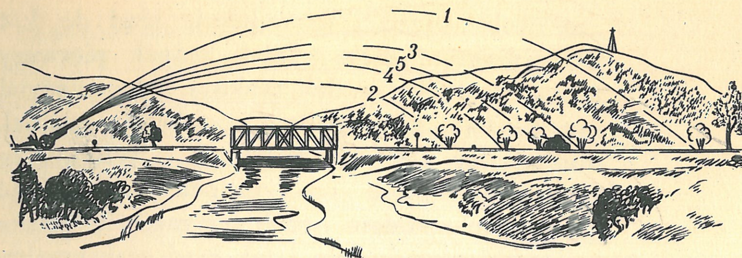
$$\text{liczba ważeń} = 1 + kn - 2^k,$$

gdzie $k = 1 + [\log_2 n]$.

Niedawno J. Słupecki udowodnił, że nie ma krótszej metody. Ma ona znaczenie nie tylko dla klasyfikacji graczy lub drużyn sportowych, ale także dla porządkowania wszelkich przedmiotów (np. kart w kartotekach alfabetycznych).

Przypomina ona problemat artyleryjski (46): Na szosie stoi tank i obserwator donosi, na którym odcinku szosy. Artylerzysta może trafić w każdy punkt odcinka, w jaki zechce, ale o skutku strzału dowiaduje się od obserwatora tylko przez sygnały, które mówią: „za celem" lub „przed celem". Jak ma postąpić?

Jeżeli strzeli naprzód w środek odcinka, potem w środek pierwszej połowy, gdy mu doniesiono „za celem" — i wciąż będzie pociskami połowił odcinki, w których sygnały lokalizują tank, postąpi najlepiej. Jeżeli odcinek ma długość L, to przy powyższym sposobie najlepszy z n strzałów trafia nie dalej od celu niż o $L/2^n$,



(46)

w najgorszym więc razie chybia o $L/2^n$. Ten najgorszy przypadek zdarza się tylko wtedy, gdy tank stoi na jednym z końców odcinka.

Cały problemat można traktować jako grę. Jeżeli nieprzyjaciel zna metodę artylerzysty, może umieścić tank możliwie daleko od miejsca, w które uderzy n pierwszych pocisków. Jeżeli ta metoda polega na połowieniu, nieprzyjaciel nie może zrobić nic lepszego, jak zająć jeden z końców; to da mu odstęp bezpieczny $L/2^n$.

Co będzie jeżeli artylerzysta wybierze inną metodę, a przeciwnik odkryje ją dzięki sprytowi swoich wywiadowców? Każda metoda prowadzi do serii strzałów, a ta seria zależy tylko od serii sygnałów „za" i „przed", bo one są jedyną informacją artylerzysty.

Zbadajmy sprawę jednego strzału, $n = 1$. Nie można tak strzelić, żeby błąd wypadł na pewno poniżej $L/2$. Tylko jedna metoda zapewnia błąd nie większy od $L/2$: strzał w środek. Przyjąwszy tę metodę artylerzysta nie może zmniejszyć maksymalnego błędu za pomocą drugiego strzału bardziej niż trafiając w środek pierwszej lub drugiej połowy według sygnałów

„za" lub „przed"; to redukuje błąd do $L/4$ w najgorszym razie. Jeżeli jednak pierwszy pocisk nie padł w środek, tankista, który wiedział przed bitwą, gdzie padnie pocisk, ma odcinek dłuższy niż $L/2$ do dyspozycji. Wiemy, że artylerzysta może ten odcinek przepołowić następnym strzałem, jeżeli trzymać się będzie najlepszej metody, ale i tak błąd maksymalny przekroczy $L/4$. To dowodzi, że popularna metoda połowienia jest najlepsza dla $n = 2$. Indukcja uczy, że to samo jest przy każdym n. Metoda klasyczna jest więc najlepsza w rozumieniu teorii gier. Nie udowodniliśmy jednak, że jest najlepsza w rozumieniu rachunku prawdopodobieństwa, który chce, żeby oczekiwana odległość była minimum. Przyjmując, że wszystkie pozycje tanku są równo prawdopodobne, znajdziemy to samo rozwiązanie, co przed chwilą.

Porównywanie ciężaru przedmiotów zamienia się w zupełnie inne zagadnienie niż poprzednio omówione, gdy wolno kłaść po kilka przedmiotów na szale. Gdy mamy osiem monet pozornie jednakowych, a wiemy, że jedna z nich jest fałszywa i waży mniej od pozostałych (ale nie wiemy która), możemy ją wykryć w dwóch ważeniach.

Kładziemy po trzy monety na szale i jeżeli jedna z szal pójdzie w górę, porównujemy w następnym ważeniu którekolwiek dwie monety z tej szali: jeżeli są równe, trzecia jest fałszywa; jeżeli nierówne — lżejsza jest fałszywa. Jeżeli pierwsze ważenie okaże równowagę trójek, w drugim ważeniu porównujemy tylko dwie pozostałe monety: jedna z nich musi być lżejsza.

Zadanie staje się trudniejsze, gdy jest 13 monet, z których jest jedna (i tylko jedna) fałszywa, ale nie powiedziano nam, czy jest cięższa, czy lżejsza od dobrych. Można ją jednak wykryć w trzech ważeniach (47). Na rysunku monety są zaznaczone literami, które tworzą napis KRYPTONIM nr DWA. Monetę oznaczoną „nr" odkładamy, a pozostałe porównujemy w trzech ważeniach, z których każde obejmuje 8 monet, po 4 na każdej szali. Wyrazy MYTO-RAKI, MODA-WINT, WYKA-PION, które pojawiają się na rysunku, pozwalają zapamiętać, które monety i na której szali należy kłaść w kolejnych ważeniach. Każdy wynik ważenia można wyrazić kreską, która pokazuje pozycję wagi: / (lewa strona cięższa), \ (prawa strona cięższa), — (obie strony równe). Na rysunku widzimy też 13 symetrycznych hieroglifów, a nad każdym z nich nazwę innej monety. Tak na przykład lewa połowa drugiego hieroglifu czytana z góry daje znaki \, —, —. To oznacza, że jeżeli w pierwszym ważeniu była prawa szala cięższa, a w drugim i trzecim ważeniu obie równe, to właśnie drugi hieroglif (jedyny o takim układzie znaków) — i to jego l e w a połowa — odpowiada wynikowi ważeń; stąd wniosek, że fałszywą monetą jest moneta R i że ta moneta jest c i ę ż s z a od pozostałych. Jeżeli zaś wyniki trzech ważeń dają p r a w ą stronę któregoś hieroglifu, to moneta nad nim oznaczona jest l ż e j s z a od pozostałych.

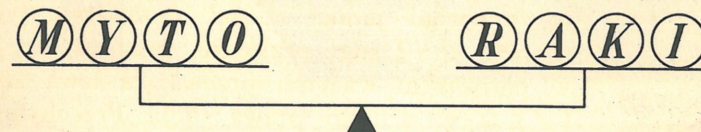
Zauważmy, że gdy hieroglify wskażą fałszywość monety „nr" — to nie dowiemy się, czy jest cięższa, czy lżejsza od pozostałych. (Dlaczego?).

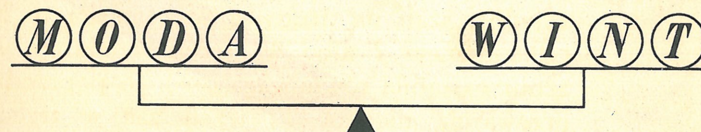
Aby zrozumieć całą procedurę, przestudiujemy kilka ewentualności. Przypuśćmy, że dwa ważenia wykazały równowagę (—), na przykład ważenie pierwsze i ważenie drugie. Wtedy monety *M, Y, T, O, R, A, K, I, D, W, N* są dobre, a więc w ostatnim ważeniu sprawcą przewagi jednej z szal może być tylko moneta *P*. Drugi przykład: przypuśćmy, że w pierwszym ważeniu przeważyła lewa szala (/), a w drugim prawa (\\). Przechylenie wagi z jednej strony na drugą mogła spowodować tylko taka moneta, która przewędrowała z jednej szali na drugą, a więc mogła to być tylko moneta *T* albo *A*. Jeżeli w trzecim ważeniu nastąpiła równowaga (—), to poprzednio przeważała moneta *T*; jeżeli zaś w trzecim ważeniu znowu przeważyła prawa szala (\\), to przyczyną tego był za mały ciężar monety *A*. (Zauważmy, że przypadek /, \\, / ani też przypadek \\, /, \\ w ogóle się nie pojawia. — Dlaczego?). Wreszcie trzeci przykład: niechaj we wszystkich trzech ważeniach przeważa szala lewa (/). Może to spowodować tylko taka moneta, która zachowuje swe miejsce na szalach, a taką monetą jest *I*. W naszym przypadku ta moneta jest lżejsza od pozostałych.

Udowodniono (niezbyt dawno), że *n* ważeń wystarcza do znalezienia złej monety pomiędzy $(3^n-1)/2$ monetami, a mniej nie. Sens tego twierdzenia wytłumaczyliśmy mówiąc o turniejach: chociaż nie ma (i nie może być) metody zapewniającej mniej ważeń niż *n*, to jednak może się zdarzyć przypadek szybszego wykrycia fałszywej monety; gdy $n = 3$, wówczas $(3^n - 1)/2 = 13$; otóż może się zdarzyć wykrycie fałszywej monety wśród trzynastu po dwóch ważeniach.

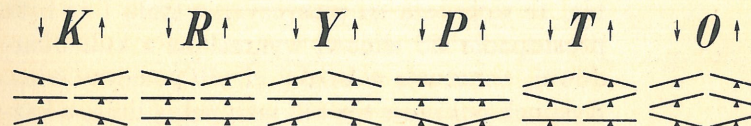
(47)

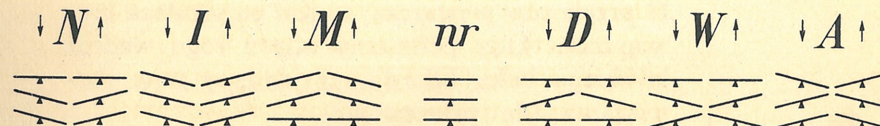
KRYPTONIM nr DWA

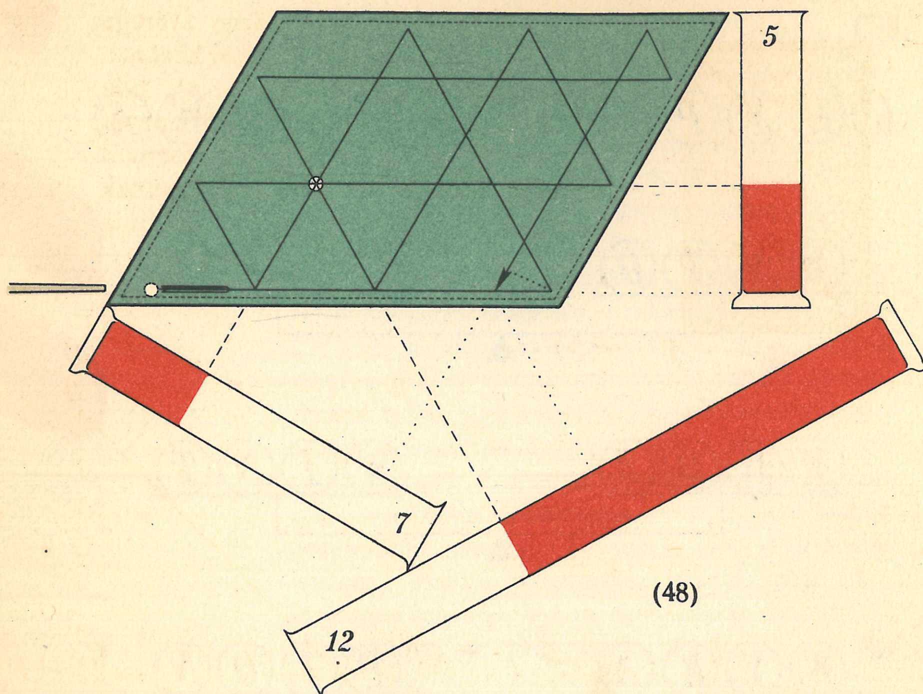






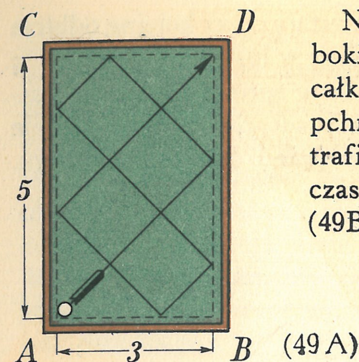






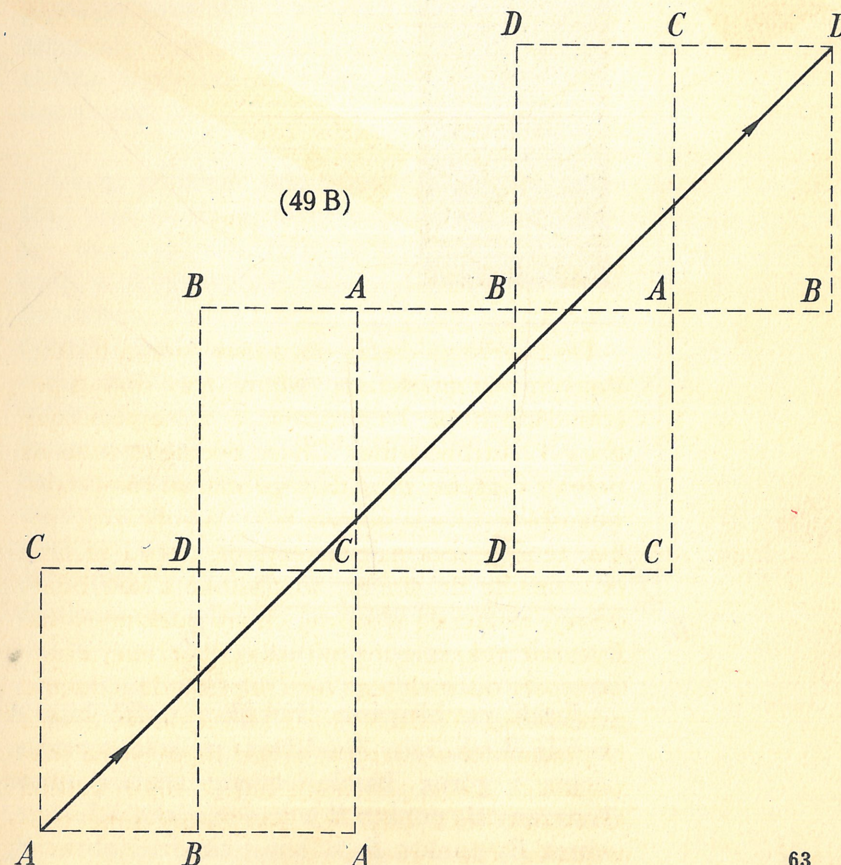
(48)

Do mierzenia cieczy używa się naczyń o określonych pojemnościach. Mamy trzy słoje o pojemnościach 12, 7 i 5 litrów, a w największym słoju 12 litrów wina. Chcąc podzielić wino na połowy możemy użyć do tego bilardu romboidowego (48) o kącie ostrym 60⁰. Wyobraźmy sobie, że słoje leżą na płaszczyźnie stołu i że linie prostopadłe do słojów, wykreślone z kuli bilardowej, oznaczają w każdej chwili poziomy wina. Rysunek pokazuje tor bili jako pełną linię, a każdy prosty odcinek tego toru odpowiada jednemu przelewowi. Widzimy tor z 11 odcinków, a więc 11 przelewów wystarcza; to jest najprostsze rozwiązanie. Gdy pchniemy bilę z rogu wzdłuż krótkiego boku bilardu, znajdziemy inne rozwiązanie (ile przelewów?).



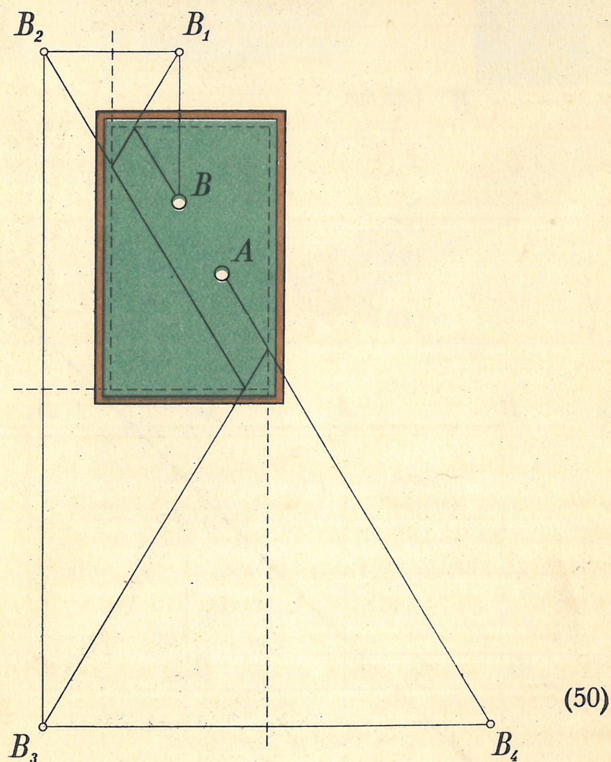
(49 A)

Na prostokątnym bilardzie, którego boki mają stosunek wyrażalny w liczbach całkowitych (na przykład 5 : 3), bila pchnięta z rogu pod kątem 45⁰ znowu trafi (49A) w jakiś róg — po pewnym czasie (tu po sześciu odbiciach). Rysunek (49B) zastępuje łamany tor bili linią



(49 B)

prostą. Prostokąty powstają przez kolejne odbicia bilardu w bokach (jakby w lustrach). Jeżeli $p : q$ wyraża stosunek boków sprowadzony do najmniejszych liczb całkowitych, to bila odbije się $p + q - 2$ razy przed dojściem do rogu. (Dlaczego?).



(50)

Jeżeli na bilardzie (50) chcę trafić bilą A w bilę B tak, żeby A uderzyła po kolei o prawą, dolną i górną bandę, muszę znaleźć obraz lustrzany B_1 punktu B w bandzie jako w lustrze, obraz B_2 punktu B_1 w lewej bandzie, obraz B_3

punktu B_2 w dolnej i obraz B_4 punktu B_3 w prawej, a potem celować bilą A w B_4. Wszystkie możliwe sposoby trafienia otrzymamy tworząc kratę prostokątną jak na rysunku (49 B) i umieszczając w każdym prostokącie obrazy B_1, B_2, B_3, ... punktu B. Połączenie A z którymś B_n daje linię prostą. Prawdziwy łamany tor dostaniemy składając po kolei prostokąty wzdłuż wspólnych boków, poczynając od ostatniego; w końcu wszystkie pokryją pierwszy prostokąt i — jeżeli papier jest przezroczysty — pojawi się łamany tor. Ten sposób można wypróbować także na zadaniu trafienia w róg.

Chcąc podzielić taki przedmiot, jak na przykład tort, na dwie równe części, możemy przyjąć stary sposób, żeby jeden wspólnik przekroił, a drugi wybrał. Zaleta tego sposobu jest oczywista. Żaden partner nie może nic zarzucić takiemu podziałowi: pierwszy może zapewnić sobie należną część dzieląc tort na dwie części, które on sam uważa za równe co do wartości; drugi zapewni sobie co najmniej to, co mu się należy, jeżeli wybierze część, którą on sam uważa za cenniejszą, a jeżeli uważa je za równowartościowe — którąkolwiek z nich. Tu zakładamy, że przedmiot nie traci wartości wskutek dzielenia, to znaczy, że suma wartości części jest zawsze równa wartości całego przedmiotu, i że partnerzy to przyjmują, chociaż co do wartości całości i części mają różne poglądy. Są takie przedmioty podzielne; na przykład kupa węgla jest takim przedmiotem.

Powstaje pytanie, jak obdzielić równo trzech lub więcej partnerów. Odpowiedź wytłuma-

czymy na przykładzie pięciu partnerów, a procedura łatwo przenosi się na każdą liczbę.

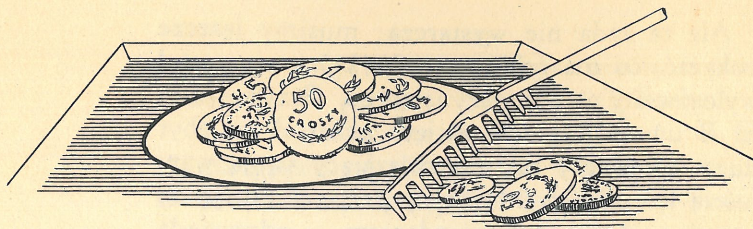
Niech wspólnicy nazywają się *A*, *B*, *C*, *D*, *E*. *A* ma prawo odciąć z tortu dowolną porcję; *B* może mu zmniejszyć tę porcję, ale nie musi; *C* z kolei ma prawo zmniejszoną lub nie zmniejszoną porcję zmniejszyć lub pozostawić bez zmiany — i tak dalej. Gdy już *E* wykonał swoje prawo (lub zachował się biernie), stwierdzamy, kto ostatni dotknął porcji. Przypuśćmy, że to *D*. Wtedy *D* dostaje porcję, a reszta tortu (wraz z cząstkami odciętymi) idzie do podziału pomiędzy *A*, *B*, *C*, *E*. W drugiej rundzie znowu jeden partner zostanie obdzielony, a w trzeciej jeszcze jeden — i zostanie dwóch; ci dwaj podzielą resztę tortu według zasady: „jeden dzieli, drugi wybiera".

Teraz sprawdźmy, czy każdy wspólnik może zapewnić sobie należną część, cokolwiek by robili jego towarzysze. Jeżeli *A* odciął zaraz z początku część, którą uważa za 1/5 co do wartości, to może się zdarzyć, że już nikt jej więcej nie przytnie i *A* ją dostanie; wtedy nie jest skrzywdzony. Jeżeli jednak ktoś przytnie tę część, już *A* jej nie dostanie, bo przypadnie ona temu, co jej dotknął ostatni. Ponieważ *A* uważał ją za 1/5 całości, więc po zmniejszeniu uważa ją za mniej od 1/5 i musi uznać, że reszta ma wartość większą niż 4/5 całości; do tej reszty *A* będzie dopuszczony jako uczestnik z prawem do 1/4 (bo zostanie już tylko czterech partnerów). W drugiej rundzie ma się zachować jak w pierwszej: jeżeli będzie pierwszym krojczym, powinien odciąć część, którą uważa za 1/4 reszty co do wartości.

Ale ta rada nie wystarcza: musimy jeszcze pokazać, co ma robić partner, który nie został wylosowany na rozpoczynającego. Przypuśćmy, że *B* uważa kawałek odcięty przez *A* za zbyt duży, to znaczy za przewyższający swoją wartością 1/5 całości. Ma wtedy przyciąć porcję do rozmiaru, który — jego zdaniem — odpowiada 1/5; jeżeli jej nikt więcej nie tknie, *B* ją dostanie i wyjdzie na swoje. Jeśli ktoś ją zmniejszy, to *B* już jej nie dostanie, ale ponieważ już *B* zmniejszył ją do 1/5, a potem ktoś jeszcze ją przyciął, więc ten, kto ją dostanie, otrzyma — zdaniem partnera *B* — mniej niż 1/5, tak że *B* przystąpi do następnej rundy z prawem do 1/4 wartości masy, która — według jego oceny — warta jest więcej niż 4/5 całego tortu, przy czym *B* jest jednym z czterech partnerów (bo jeden odpadł).

Teraz metoda jest jasna: kto przycina pierwszy w którejkolwiek rundzie, niech odetnie porcję, którą uważa za $1/n$ całości przeznaczonej w danej rundzie do podziału pomiędzy n partnerów. Jeżeli nie jest pierwszy w rundzie i widzi, że ktoś odciął porcję większą od $1/n$, niech ją przytnie do $1/n$; jeżeli zaś widzi porcję $1/n$ lub mniejszą (według swojej oceny), niech nie dotyka tortu. Ta metoda zapewnia każdemu co najmniej jego należną część.

Zasada sprawiedliwego podziału daje taką grę (51): wewnątrz koła leżą różne monety, a partnerzy, którzy przyczynili się w równych częściach do tej puli, mają ją rozdzielić pomiędzy siebie. Zamiast noża jak przy torcie, tu są grabki do zagarniania monet z puli lub posuwania z powrotem, co odpowiada odcinaniu sobie kawałka tortu lub przycinaniu cudzego



(51)

kawałka. Ponieważ trzeba to robić jednym ruchem grabek, więc prócz orientacji również i zręczność wpływa na wynik.

Inna jest metoda podziału przedmiotów niepodzielnych. Na przykładzie czterech braci, którym przypadł do podziału spadek złożony z radia, motocykla i zegarka, metoda tak wygląda: Każdy wycenia przedmioty osobno. Na przykład *A* pisze: radio 3000 zł, motocykl 5000 zł, zegarek 1500 zł. *B* i *C* też piszą swoje oszacowania. Arbiter zbiera kartki i robi z nich tabliczkę:

	A	*B*	*C*	*D*
R	3000	5000	2500	3000
M	5000	4000	4000	6000
Z	1500	1000	1000	500
Razem	9500	10000	7500	9500 zł
1/4	2375	2500	1875	2375 zł

Z tabliczki wynika, że *A* wycenia część spadku jemu należną jako 2375 zł, *B* jako 2500 zł, *C* jako 1875 zł, *D* jako 2375 zł. W każdym wierszu ujęto w ramki największą liczbę; każdy przedmiot przypadnie temu, kto go najwyżej wycenił; więc *A* dostanie zegarek, *B* — radio, *D* — motocykl, *C* nie dostanie żadnego przedmiotu. Teraz stan jest taki:

	A	*B*	*C*	*D*
Otrzymali przedmioty wartości zł	1500	5000	—	6000
Należało im się	2375	2500	1875	2375
Otrzymali za mało o	875		1875	
„ za dużo o		2500		3625

Wobec tego *B* i *D* powinni złożyć gotówką 2500 + 3625 złotych, razem 6125 złotych; z tego *A* otrzyma 875 zł, *C* otrzyma 1875 zł, razem 2750 zł. Pozostanie nadmiar 6125 — — 2750 = 3375 zł, którym obdzieli się równo wszystkich partnerów dając każdemu po 843 zł 75 gr. Tak więc:

Otrzyma dopłatę w gotówce:

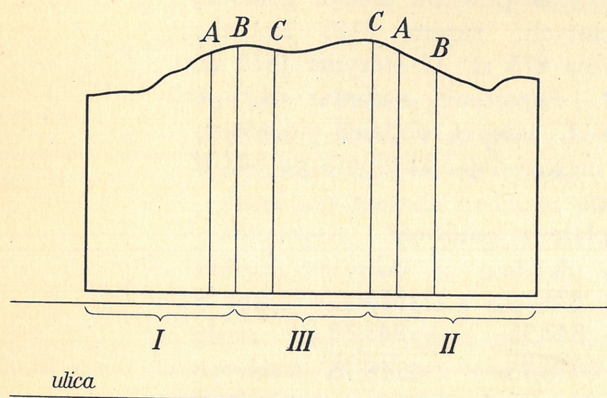
A	C
875	1875
+ 843,75	+ 843,75
1718,75	2718,75

Dopłaci gotówką:

B	D
2500	3625
— 843,75	— 843,75
1656,25	2781,25

Teraz świadczenia gotówkowe braci *B* i *D* pokrywają dopłaty należne braciom *A* i *C*. Łatwo stwierdzimy, że każdy otrzymał bądź to w przedmiotach, bądź w gotówce o 843 zł 75 gr więcej, niż mu się należało według jego własnej wyceny przedmiotów. Tak na przykład partnerowi *D* należało się 2375 zł: otrzymał motocykl, który sam ocenił na 6000 zł, a spłacił gotówką 2781 zł 25 gr, więc otrzymał na czysto 3218 zł 75 gr, a to jest właśnie o 843 zł 75 gr więcej niż 2375 zł, stanowiące według jego własnej wyceny ćwierć spadku. Tak samo będzie z innymi braćmi.

Obszary najłatwiej dzielić przy pomocy mapy. Gdy jest trzech współwłaścicieli ogrodu i chcą go podzielić na trzy równe części, mogą sporządzić mapkę (52) w trzech jednakowych egzemplarzach na kalce i każdy partner narysuje na kalce dwie linie prostopadłe do



(52)

ulicy, które — jego zdaniem — dzielą ogród na trzy części równe co do wartości (nie muszą być równe co do powierzchni, bo ziemia jest różnej jakości w różnych miejscach, a ponadto na przykład partner, którego dom przylega do ogrodu, wyżej sobie ceni 1 m^2 części przyległej niż 1,2 m^2 części odległej); chodzi tu o wartość subiektywną. W ten sposób po nałożeniu mapek pojawi się na nich sześć linij granicznych oznaczonych inicjałami imion partnerów (Adam, Benedykt, Czesław). Jeżeli linie tak biegną, jak na szkicu, rozjemca przyzna Adamowi część I, Benedyktowi II, a Czesławowi III. Jak widać, każdy dostał więcej niż to, co sam uznał za jedną trzecią co do wartości. Linie mogą wypaść rozmaicie; jest 8 istotnie różnych możliwości,

ale zawsze jest możliwy podział przyznający każdemu co najmniej tyle, ile sam uznał za jedną trzecią. W niektórych przypadkach rozjemca rysuje linie połowiące pasma graniczne, ale to nie jest niezbędne.

Zaletą podziału na mapie jest to, że wszyscy partnerzy dochodzą do głosu równocześnie, tak że prowizoryczne linie podziału pozostają nieznane partnerom, którzy ich nie rysowali sami. Rola rozjemcy ogranicza się do funkcji automatycznej, określonej umową; głównym punktem tej umowy jest to, że każdy ma dostać co najmniej tyle, ile sam określił jako jedną trzecią.

Można użyć tej metody także do podziału tortu. Jednak najprostszy sposób podziału tortu na trzy części jest następujący:

Partner *A* dzieli tort na trzy części. *B* i *C* orzekają, każdy z osobna, które części są dobre, a które za małe, przy tym jednak każdy musi uznać co najmniej jedną za dobrą. Jeżeli *B* i *C* uznają tylko jedną część za dobrą, i to obaj tę samą, to *A* wybiera z dwóch pozostałych, którą chce, a resztą dzielą się *B* i *C*: *B* ma prawo zmniejszyć jedną z części, a *C* wybiera zmniejszoną lub resztę. Jeżeli *B* uzna jakąś część za dobrą, a *C* inną, to biorą sobie te części, a trzecią musi wziąć *A*. Zaletą tego sposobu jest to, że tort nie rozpadnie się nigdy na więcej niż 4 kawałki.

W niektórych krajach obowiązuje przy wyborach parlamentarnych system proporcjonalny. Na przykładzie trzech partyj *A*, *B*, *C* wygląda to tak, że w okręgu, który ma wybrać 5 posłów, rozdziela się mandaty pomiędzy partie

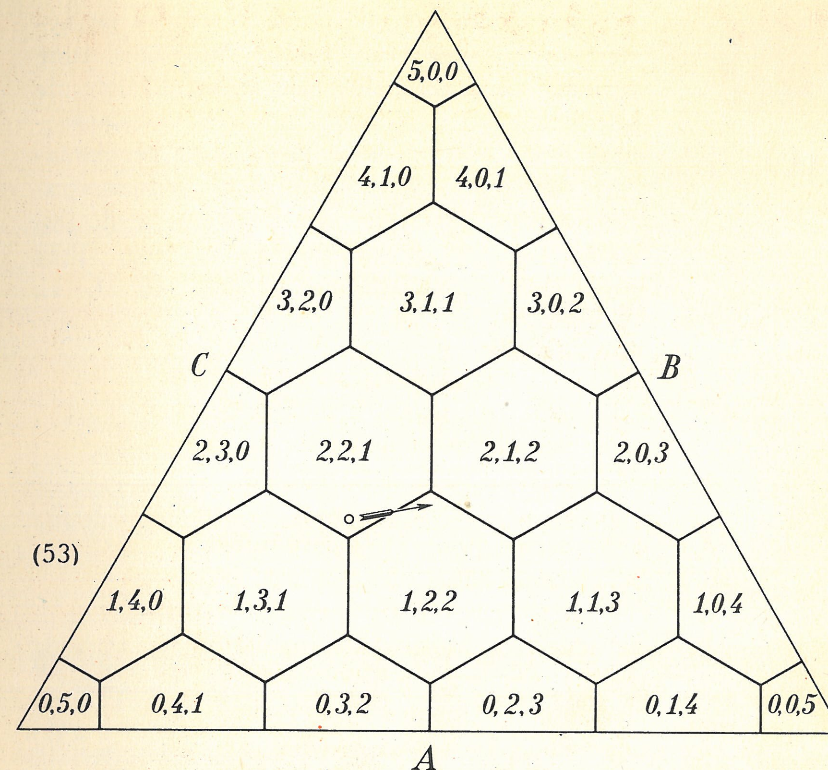
A, *B*, *C*, proporcjonalnie do liczby głosów, które padły na listy wyborcze *A*, *B*, *C*. Powstaje trudność z ułamkami: jeżeli na przykład oddano 150 000 głosów, z których na partie *A*, *B*, *C* padło 43 500, 69 000 i 37 500, to na *A* przypada 1,45 mandatu, na *B* — 2,3 mandatu, a na *C* — 1,25 mandatu. Są różne sposoby uwzględniania ułamków. Najprostszy jest taki, że naprzód rozdaje się miejsca według całkowitych liczb, a więc *A* dostaje 1, *B* — 2, a *C* — 1 mandat. Reszty ułamkowe są 0,45, 0,3 i 0,25; największa z nich 0,45, więc wolny piąty mandat dostanie partia *A*. Wynik będzie: *A* — 2, *B* — 2, *C* — 1 mandat.

Jeżeli narysujemy trójkąt równoboczny (53) o wysokości 10 cm, to każdy punkt wewnętrzny będzie miał sumę odległości od boków *A*, *B*, *C* równą 10 cm. Każdy punkt można uważać za jeden z możliwych rezultatów wyborów, jeżeli 1 mm oznacza 1500 głosów. Tak na przykład punkt oznaczony na rysunku kółeczkiem odpowiada wynikowi (43 500, 69 000, 37 500), bo jego odległości w milimetrach od boków *A*, *B*, *C* pomnożone przez 1500 dają właśnie ten wynik.

Ale zasada reszt da rozdział mandatów (2, 2, 1) także przy wielu innych wynikach głosowania, które nie zanadto odbiegają od obliczonego przykładu. Jest więc wiele punktów, którym odpowiada rozdział (2, 2, 1).

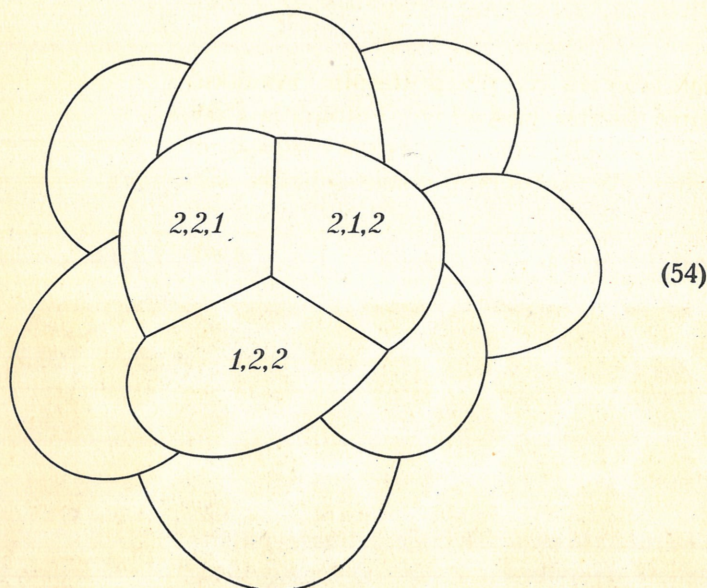
Wszystkie punkty, które według sposobu kolejności reszt dają (2, 2, 1) jako rozdział mandatów, wypełniają na rysunku sześciobok foremny oznaczony tą trójką liczb. Tak się tłumaczy cały podział trójkąta na sześcioboczne pola.

(53)



Strzałka na rysunku wskazuje ostrzem punkt, który należy do pola (1, 2, 2). Z tego widać, że w razie unieważnienia pierwszych wyborów może się zdarzyć, że przy tej samej liczbie głosujących partia *A* straci mandat, choć uzyska więcej głosów, jak widać z kierunku strzałki ku górze; to stracone miejsce nie może jednak przypaść partii, która straciła część głosów. (Jak to pogodzi czytelnik ze zdarzeniem, które by było wyobrażone przez zmianę kierunku strzałki?).

System przed chwilą opisany nazywa się systemem największych reszt. Są różne inne systemy proporcjonalne, ale żaden z nich nie jest wolny od paradoksu, że partia może odebrać innej głosy, a więc powiększyć przypadającą na nią frakcję zwolenników, a jednak stracić mandat. Bo każdy system prowadzi do podziału trójkąta równobocznego na pola. Trzy pola (54) odpowiadające trójkom (2, 2, 1),



(54)

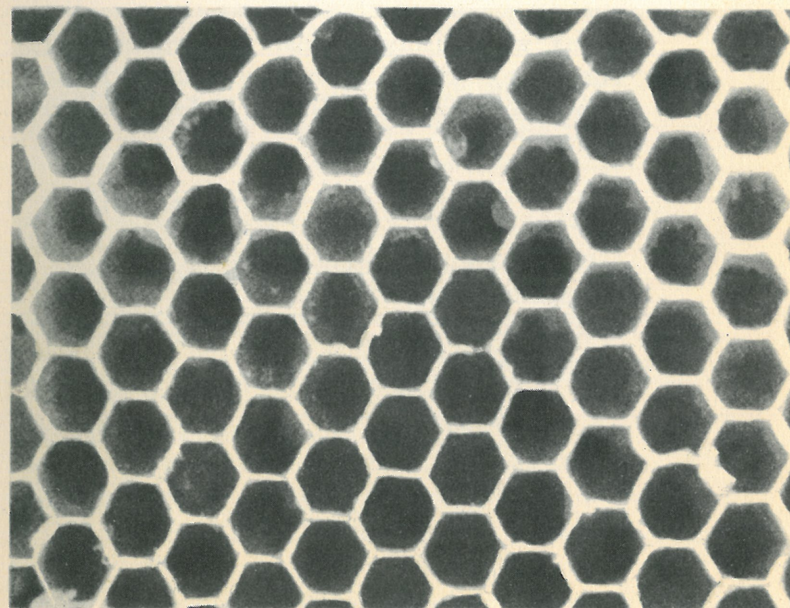
(2, 1, 2), (1, 2, 2) będą graniczyły ze sobą. Chcąc uniknąć paradoksu musimy narysować dwie linie ograniczające pole (1, 2, 2) tak, żeby obie oddalały się od podstawy *A* trójkąta, to znaczy, żeby kąt, który zawierają, był większy od 180^0. Ale to samo dotyczy dwóch innych pól, a nie mogą wszystkie trzy kąty być większe od 180^0, skoro razem mają 360^0.

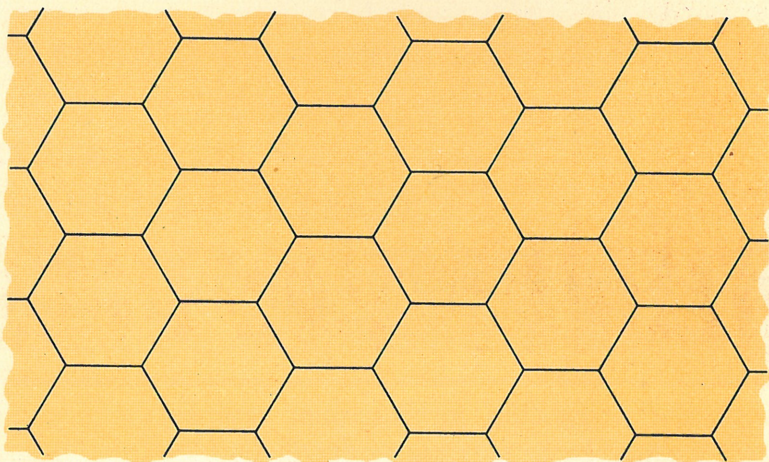
IV

PARKIETAŻE
PLASTRY PSZCZELNE
BUTY
POLA I DŁUGOŚCI

Podział trójkąta na przedostatnim rysunku przypomina plaster pszczelny. Fotografia (55) pokazuje sześcioboczne otwory wypełniające płaszczyznę. W każdym punkcie schodzą się

(55)



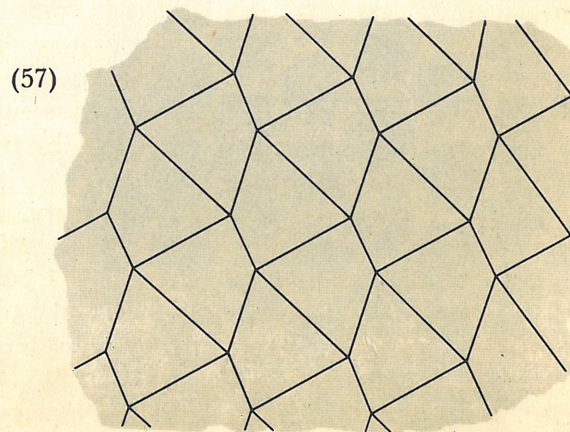


(56)

trzy sześcioboki, jest to (56) jedyny tego rodzaju podział płaszczyzny; przy każdym innym, niż sześcioboczny, muszą wystąpić punkty, gdzie spotyka się więcej obszarów niż trzy.

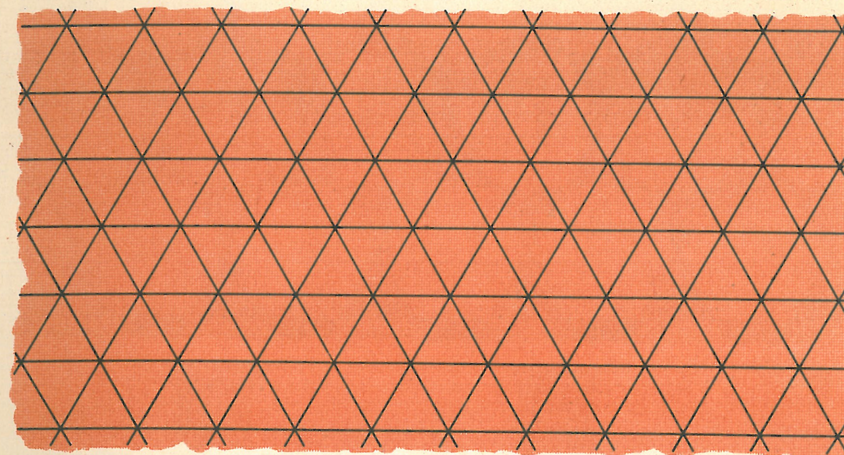
Już widzieliśmy podział na kwadraty (szachownicę). Przez deformację można z niego otrzymać parkietaż (57) z dowolnych czworoboków.

(57)

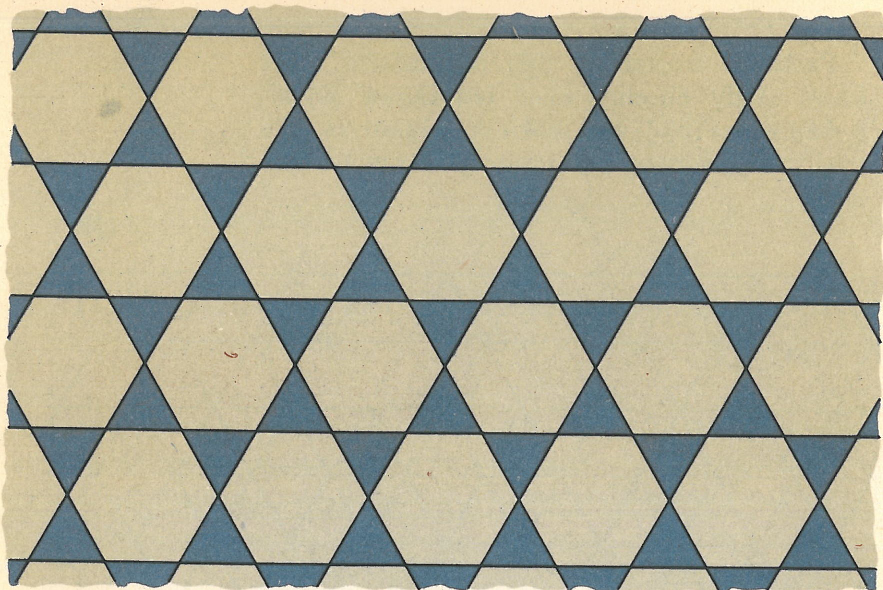


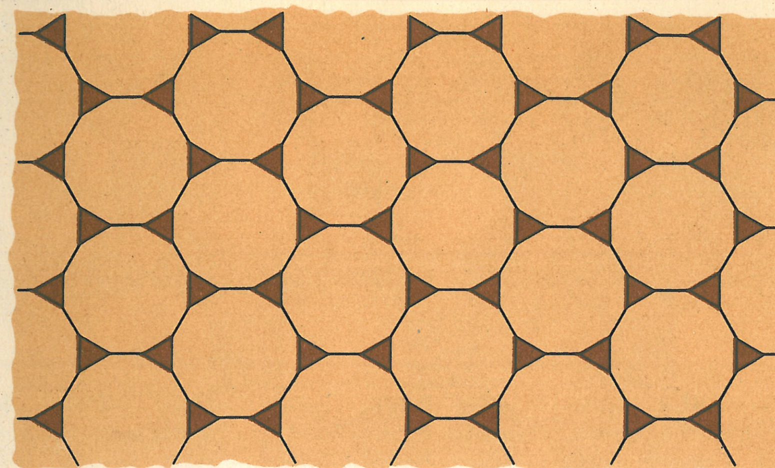
Parkietaż trójkątowy (58) jest ostatni z tej klasy. Gdy chcemy mieć jednakowe płytki, a każda ma być wielobokiem foremnym, nie znajdziemy innego parkietażu jak trzy tu opisane.

(58)

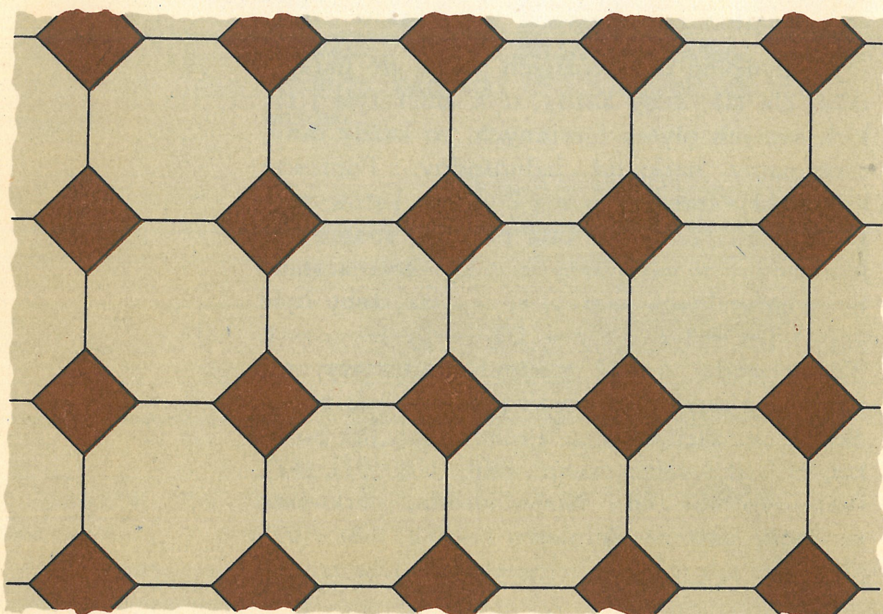


Jeżeli wolno użyć różnych płytek do parkietażu, ale tak, żeby każdy styk miał tyle i takich samych płytek foremnych, co każdy inny, otrzymamy parkietaż jednorodny. Ponieważ kąt n-boku foremnego ma $2 - 4/n$ kątów prostych, czyli $1/2 - 1/n$ kąta pełnego, znalezienie jednorodnych parkietaży wymaga wyznaczenia liczb naturalnych $n, p, q, r, \ldots$ tak, żeby było $1/2 - 1/n + 1/2 - 1/p + 1/2 - 1/q + \ldots = 1$. To prowadzi do 17 różnych parkietaży, ale tylko 11 z nich można rozciągnąć na całą płaszczyznę bez zachodzenia. Prócz trzech już pokazanych jest jeszcze osiem: (59), (60), (61), (62), (63), (64), (65), (66). Niejednorodne parkietaże są może jeszcze ładniejsze: (67), (68), (69), (70). Jest ich nieskończenie wiele. (Dlaczego?).

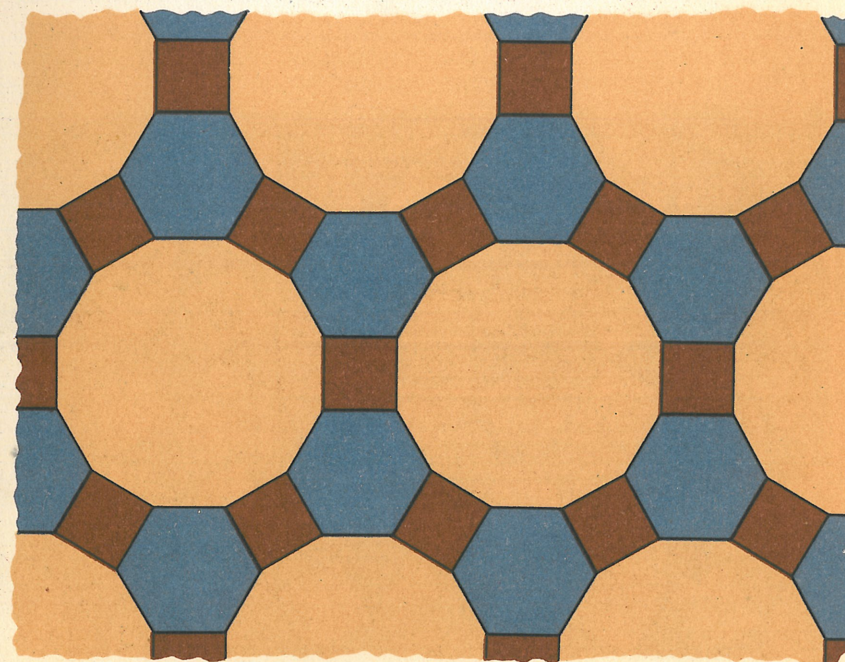

(59)

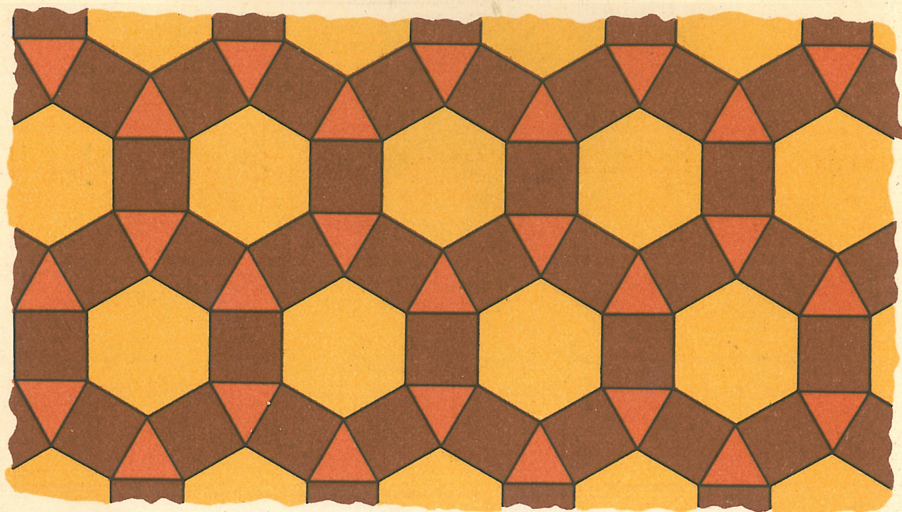

(61)

(60)



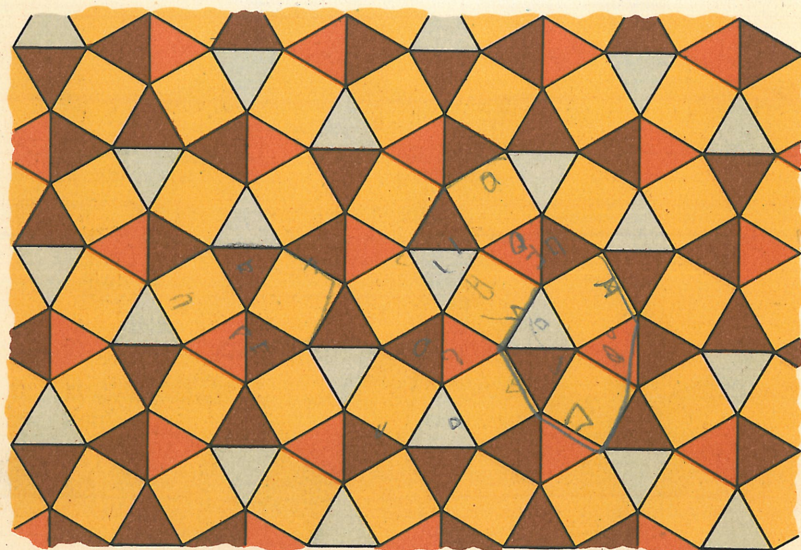
(62)

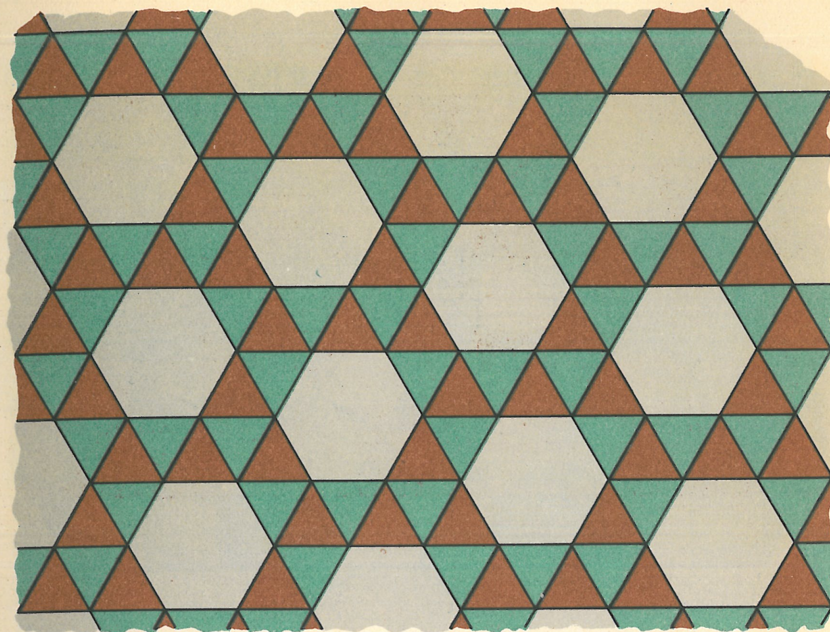




(63)

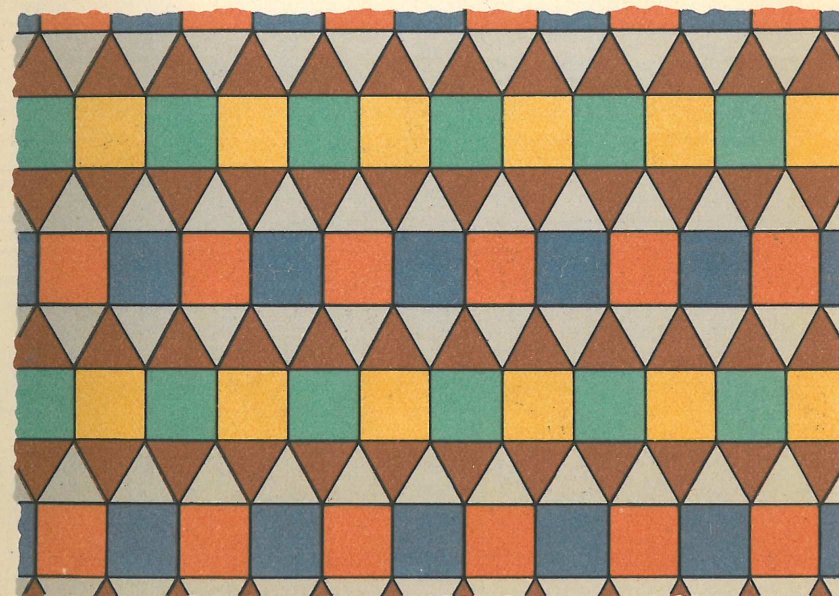
(64)

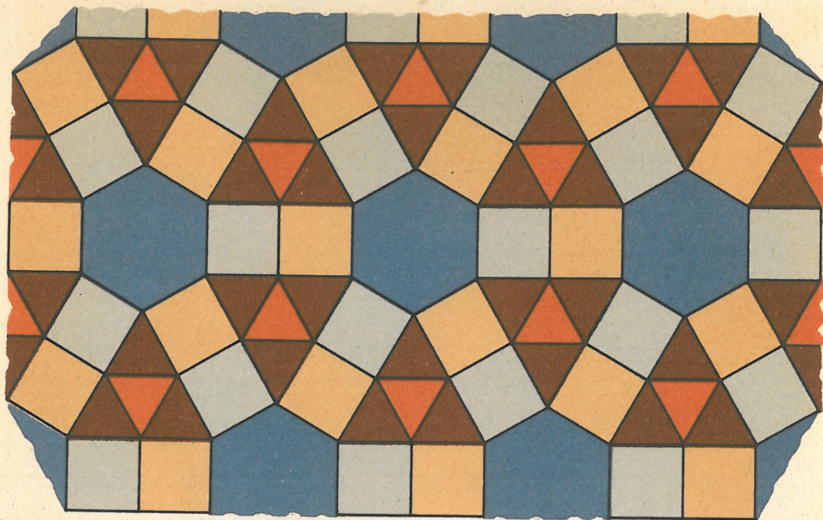




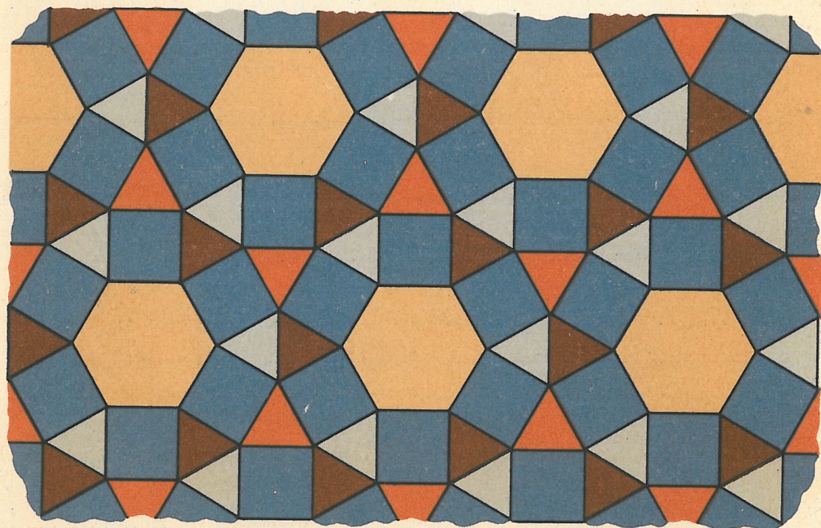
(65)

(66)

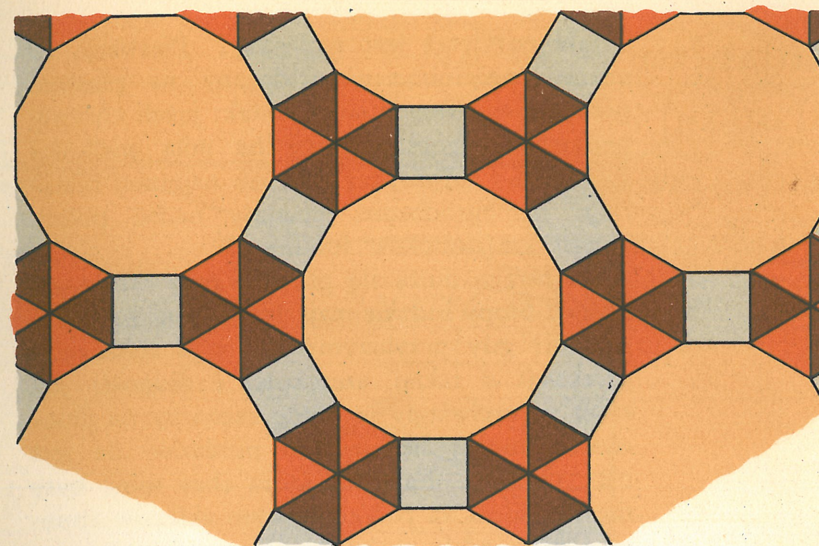




(67)

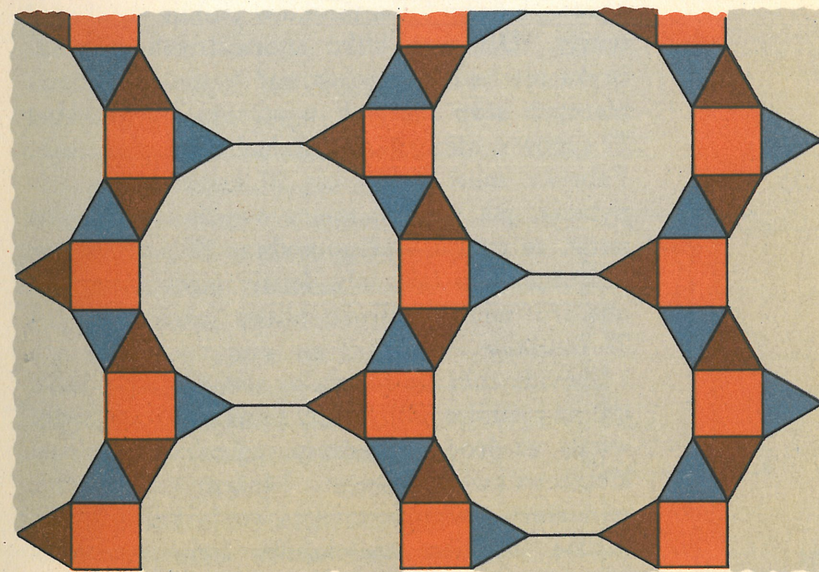


(68)



(69)

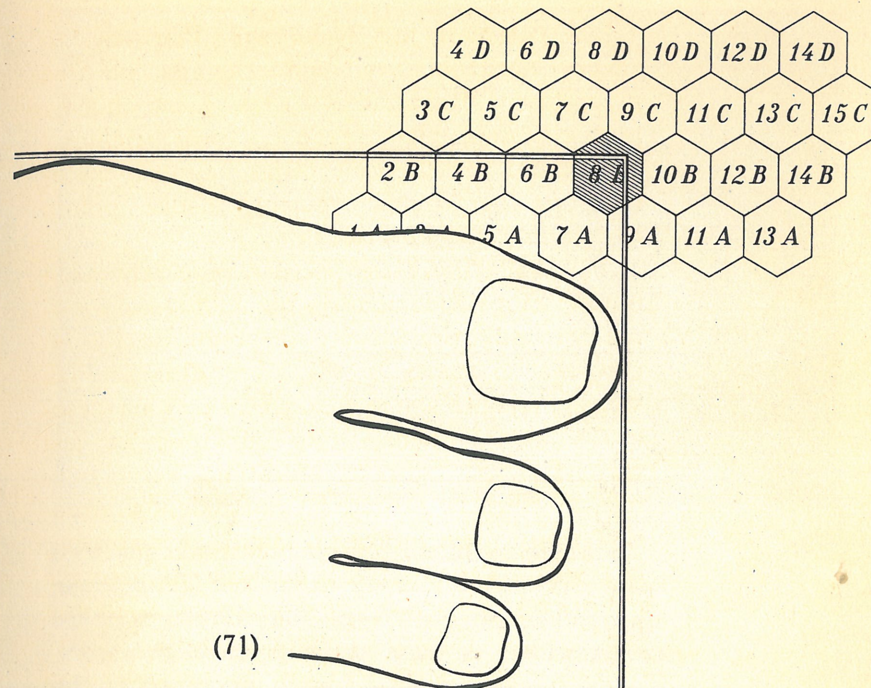
(70)



Jaki parkietaż jest najlepszy? Pierwszy, to znaczy sześcioboczny, widoczny na plastrze pszczelnym. Rozumiemy to tak: jeżeli chcemy podzielić całą płaszczyznę na pola wielkości 1 hektara i zużyć przy tym jak najmniej materiału na ogrodzenia, musimy nadać polom kształt sześcioboków foremnych.

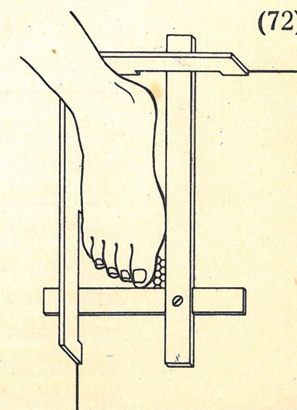
Ta uwaga może się przydać przy fabrykacji butów. Stopy ludzkie mają różne długości i szerokości; gdy przyłożymy do rogu deszczułki prostokąt o takiej szerokości i długości jak stopa, przeciwległy jego róg zaznaczy na deszczułce punkt; będzie tyle punktów, ile jest różnych stóp. Fabryka, która chce robić buty męskie, musi za pośrednictwem sklepów zmierzyć stopy wielu mężczyzn kupujących obuwie; te pomiary dadzą cały rój punktów na deseczce mierniczej. Okaże się, że rój złożony z kilkuset lub tysiąca punktów utworzy dosyć zwarty obszar, a tylko kilka punktów padnie daleko od reszty. Dla tych kilku anormalnych stóp fabryka nie będzie produkować butów. Dla normalnych stóp męskich wystarczy na przykład 27 typów o różnych długościach i szerokościach. Fabryka musi sporządzić 27 kopyt i powstaje pytanie, jak wybrać miary owych kopyt. Jest jasne, że trzeba do tego wybrać 27 punktów na deseczce, i to tak, żeby każdy punkt zwartego obszaru miał możliwie blisko jakiś z owych 27 punktów.

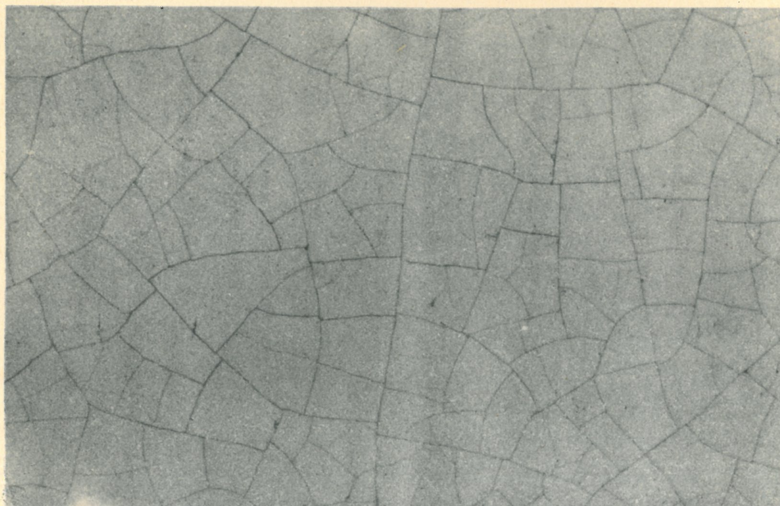
Zwykle robi się to tak, że ustawia się punkty jak na rysunku (28); każdy punkt można uważać wtedy za środek kwadratu, co odpowiada parkietażowi kwadratowemu. Możemy jednak użyć parkietażu sześciobocznego; wtedy każdy punkt będzie środkiem sześcioboku foremnego (71).



(71)

Okazuje się, że ten drugi sposób jest lepszy: przy tej samej liczbie 27 typów odległość punktów od sąsiednich będzie o blisko 7% mniejsza, co ułatwi dopasowanie butów do stóp. Można sporządzić deseczkę (72) z parkietażem sześciobocznym i z nazwami typów na każdym polu; stawiając stopę w rogu deseczki opatrzonej w listwy i przykładając do niej ruchomą ekierkę odczytamy w sześcioboku wskazanym przez ekierkę właściwy numer buta.

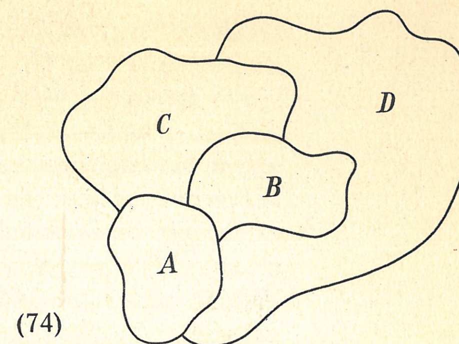

(72)



(73)

Spękania mułu na brzegu rzeki, gdy go wysuszy słońce, lub glazury na kaflach (73) wydają się zupełnie przypadkowe. Przy bliższym obejrzeniu widać, że kąty są zbliżone do prostych. To da się wytłumaczyć, jeżeli przyjmiemy, że spękania są wynikiem kurczenia się warstwy mułu. Linia pęknięcia musi być według zasad mechaniki taka, żeby praca potrzebna do rozerwania warstwy była możliwie mała. Ta praca jest proporcjonalna do wielkości przekrojów, które powstają przez rozerwanie, i linie pęknięć muszą mieć taki przebieg, który możliwie zmniejsza wielkość przekrojów. W materiale jednorodnym ten warunek daje kąty proste. Zmienna grubość warstwy tłumaczy zakrzywienie linij (dlaczego?).

W każdym rozgałęzieniu widać linię przechodzącą bez załamania i wpadającą do niej boczną: linia gładka jest starsza. Ta uwaga pozwala ustalić genealogię linij i znaleźć w końcu przodków całej rodziny szczelin.



(74)

Przypuśćmy, że deseń składa się początkowo (74) z dwóch obszarów, A i B. Przybywa nowa linia łącząca dwa punkty już istniejących łuków i tworzy nowy obszar C; ponieważ rozcina ona te dwa łuki na dwa kawałki każdy, więc razem przybywają trzy nowe łuki. Po n takich krokach jest o n krajów więcej i o $3n$ granic więcej. Na początku były dwa kraje i trzy granice, więc teraz będzie $n + 2$ krajów i $3n + 3$ granic. Uważajmy zewnętrze (Ocean) też za kraj: będzie $n + 3$ krajów i $3n + 3$ granic. Wzdłuż każdej granicy sąsiadują dwa kraje i rysując ją zwiększamy liczbę sąsiedztw o dwa: X z Y i Y z X. Tak więc mamy w końcu $2 \cdot (3n + 3) =$ $= 6n + 6$ sąsiedztw i $n + 3$ krajów, tak że średnia liczba sąsiadów na kraj jest

$$(6n + 6)/(n + 3) = 6 - 12/(n + 3).$$

Ta liczba jest mniejsza od 6, ale zbliża się do 6, gdy liczba krajów wzrasta; pamiętajmy, że Ocean liczy się za kraj, a liczba k krajów lądowych jest $n + 2$, tak że średnia liczba sąsiedztw jest $6 - 12/(k + 1)$.

Chcemy teraz pozbyć się liczenia Oceanu i uważania wybrzeży za granice. Stracimy przez to jeden kraj i co najmniej 6 sąsiedztw, bo liczba

krajów zewnętrznych, czyli nadmorskich, wynosi co najmniej 3. Wobec tego, że średnia liczba sąsiedztw była mniejsza od 6, ta średnia zmaleje i będzie mniejsza od $6 - 12/(k + 1)$, a tym bardziej mniejsza od 6.

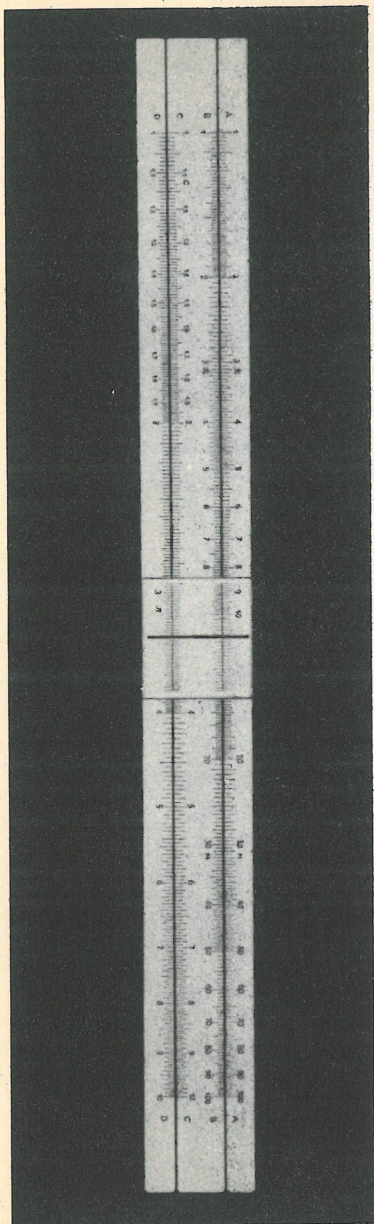
Powiedzieliśmy, że liczba krajów nadmorskich jest (przy $k \geqslant 3$) co najmniej 3. Otóż można łatwo narysować mapę, gdzie jest kilka krajów (np. 10), a jednak tylko jeden lub dwa są nadmorskie; będzie tak, gdy dopuścimy istnienie krajów pierścieniowych lub takich, które z innym graniczą wzdłuż dwóch nie połączonych granic. Nie uwzględniliśmy także przypadku, że więcej niż 3 kraje mają wspólny punkt graniczny.

Chcielibyśmy zbadać, czy reguła o nieosiągalności szóstki jako średniej liczby sąsiedztw stosuje się do wszelkich map. Niech będzie zatem dowolna mapa — z tym, że każdy kraj jest spójny (tak nie było w Niemczech przed rokiem 1870). Możemy zacząć od jednego kraju i rysować po kolei dalsze granice; za każdym razem łączymy dwa punkty graniczne. Może się zdarzyć, że taka linia nie da nowego kraju (kiedy?), ale wtedy nie da także nowych sąsiedztw. Jeżeli da nowy kraj, to tylko jeden, a liczba nowych łuków może być 1, 2 lub 3. Wytworzą one co najwyżej 6 nowych sąsiedztw — i dawne rozumowanie się utrzyma: średnia liczba sąsiedztw będzie mniejsza od sześciu. Tym razem jednak nie pozbyliśmy się Oceanu, który występuje w rachubie jako kraj. Ale na każdej mapie dowolnie narysowanej reguła się sprawdza także, gdy liczymy tylko ląd i granice suche. Dowód jest prawdopodobnie niełatwy i autor nie może zaręczyć, że istnieje.

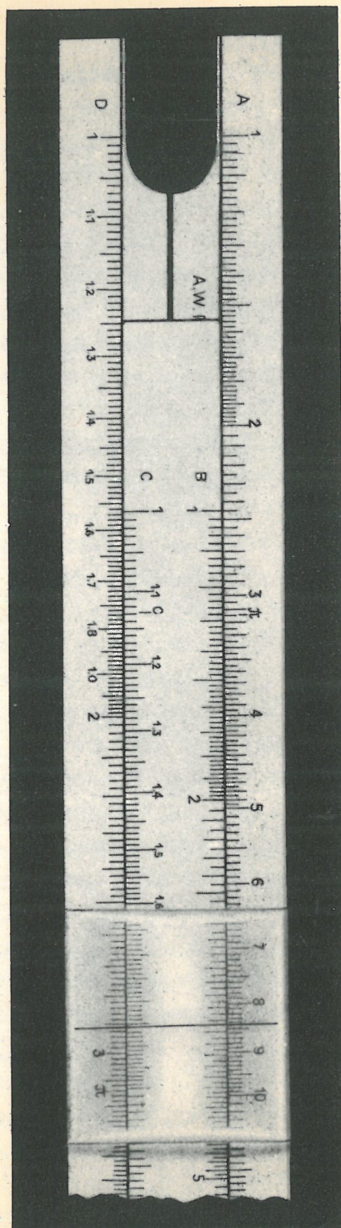
Wyobraźmy sobie, że mierzymy systematycznie wzrost dziecka od ukończonego pierwszego roku życia w ten sposób, że na białej listwie znaczymy kreską jego wysokość i piszemy obok datę: 1 oznacza moment ukończenia pierwszego roku, 1,1 oznacza moment ukończenia 1 roku i 1/10 następnego, 2 oznacza moment ukończenia 2 lat i tak dalej.

Przypuśćmy, że szybkość wzrostu jest odwrotnie proporcjonalna do czasu, to znaczy, że dziecko dwuletnie ma dwa razy mniejszy przyrost niż roczne, dziecko trzyletnie trzy razy mniejszy przyrost niż roczne i tak dalej. Wtedy liczby na listwie utworzą skalę, która się nazywa logarytmiczną.

Takie właśnie skale widzimy na suwaku logarytmicznym (75). Jest ich na nim cztery: dwie górne i dwie dolne; z nich dwie środkowe są wyryte na ruchomej listewce. Skale dolne nie różnią się niczym od siebie ani górne od siebie, ale dolne są dwukrotnym powiększeniem górnych. Przy dowolnym wysunięciu listewki zawsze liczby stojące bezpośrednio nad sobą na skalach są proporcjonalne. Tutaj (76), na przykład, liczby na stałej skali górnej są 2,45 razy większe niż na skali bezpośrednio pod nią, tak że chcąc pomnożyć 3,45 przez 2,45 wystarczy przesunąć okienko z włosem na 3,45 i odczytać bezpośrednio iloczyn 8,45 wskazany przez włos na stałej skali górnej. Błąd nie przekracza 0,3%. Liczby na najwyższej skali są kwadratami liczb stojących pod nimi na najniższej. Włos na fotografii pokazuje $2{,}91^2 = 8{,}45$. Wobec tego można na suwaku obliczać drugie pierwiastki (jak?). Suwak logarytmiczny nadaje się specjalnie do zadań z reguły trzech.

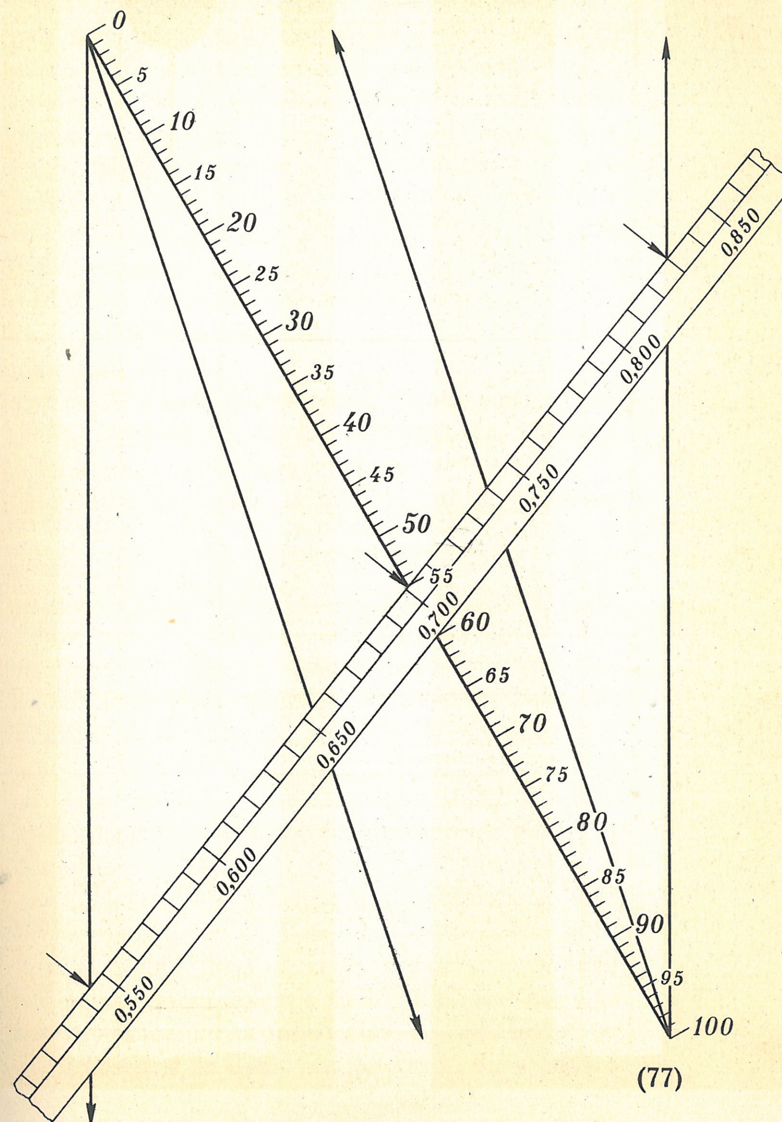


(75)



(76)

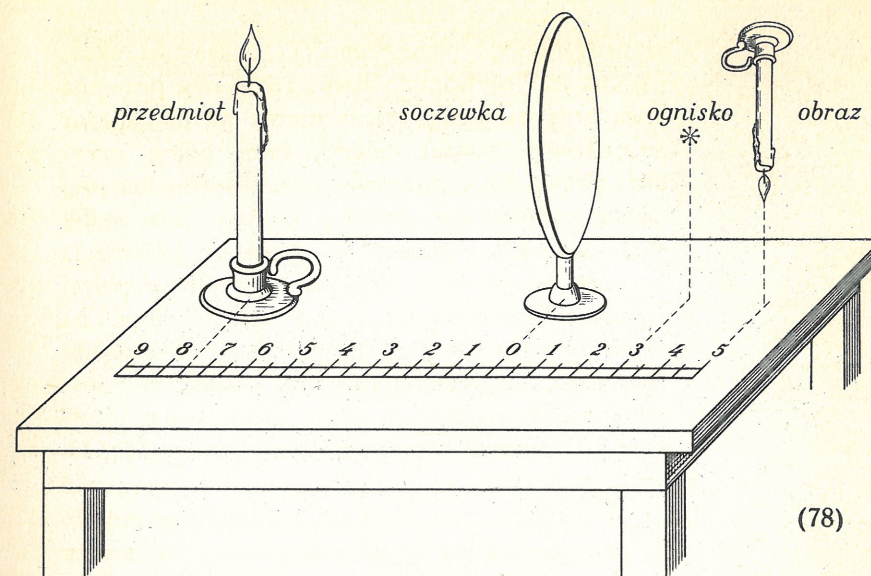
Gdy trzeba zmieszać dwa płyny o różnych ciężarach gatunkowych, na przykład dwa gatunki benzyny lub benzynę z naftą, można użyć do obliczenia ciężaru gatunkowego mie-



(77)

szaniny takiego *nomogramu* (77): szeroka skala ukośna jest ruchoma. Tam, gdzie ona przecina lewą linię pionową, odczytujemy na niej ciężar gatunkowy lżejszej cieczy; tam, gdzie przecina prawą linię pionową, odczytujemy na niej ciężar gatunkowy cięższej cieczy. Na stałej skali ukośnej czytamy w punkcie przecięcia z ruchomą, ile jest procent objętości cięższej cieczy w mieszaninie, i w tymże punkcie na ruchomej skali ciężar gatunkowy mieszaniny. Aby obliczyć ciężar gatunkowy mieszaniny złożonej z 55% nafty o ciężarze gatunkowym 0,830 i 45% benzyny o ciężarze gatunkowym 0,543, kładziemy ruchomą skalę punktami 0,830 i 0,543 na liniach pionowych i przesuwamy pionowo, aż przetnie punkt 55 na stałej skali. W tymże punkcie na ruchomej skali odczytamy 0,701; to jest właśnie ciężar gatunkowy mieszaniny, o który chodziło. Teoria polega na podobieństwie trójkątów utworzonych przez skale i linie. Gdy ciężary gatunkowe składników różnią się o mniej niż 20%, należy użyć ukośnych grubych linij zamiast pionowych. Znając jakiekolwiek trzy dane, można znaleźć czwartą; na przykład z ciężarów gatunkowych składników i mieszaniny nomogram pozwala łatwo znaleźć frakcje składników. (Jak?).

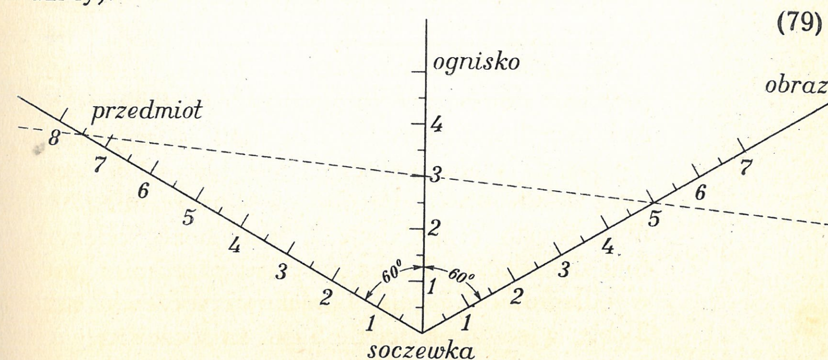
Są prostsze nomogramy. Takim jest na przykład nomogram fotografów. Odległości f, g, h przedmiotu, obrazu i ogniska od soczewki (78) są związane wzorem $1/f + 1/g = 1/h$, według zasad optyki. Kreśląc na nomogramie (79) linię prostą przez dwie z tych liczb, odczytuje się trzecią. Tu na przykład przedmiot jest w odległości 7,5 cala, ogniskowa soczewki ma 3 cale, więc obraz będzie 5 cali za soczewką.



(78)

Możemy użyć tego nomogramu do zadania, ile czasu (h) trzeba dwóm ludziom do wykonania wspólnym wysiłkiem pracy, do której jeden potrzebowałby sam f, a drugi g godzin. (Gdy jeden robotnik potrzebuje 5 godzin, by napełnić auto ciężarowe węglem, a jego pomocnik 7,5 godziny, razem zrobią to w 3 godziny).

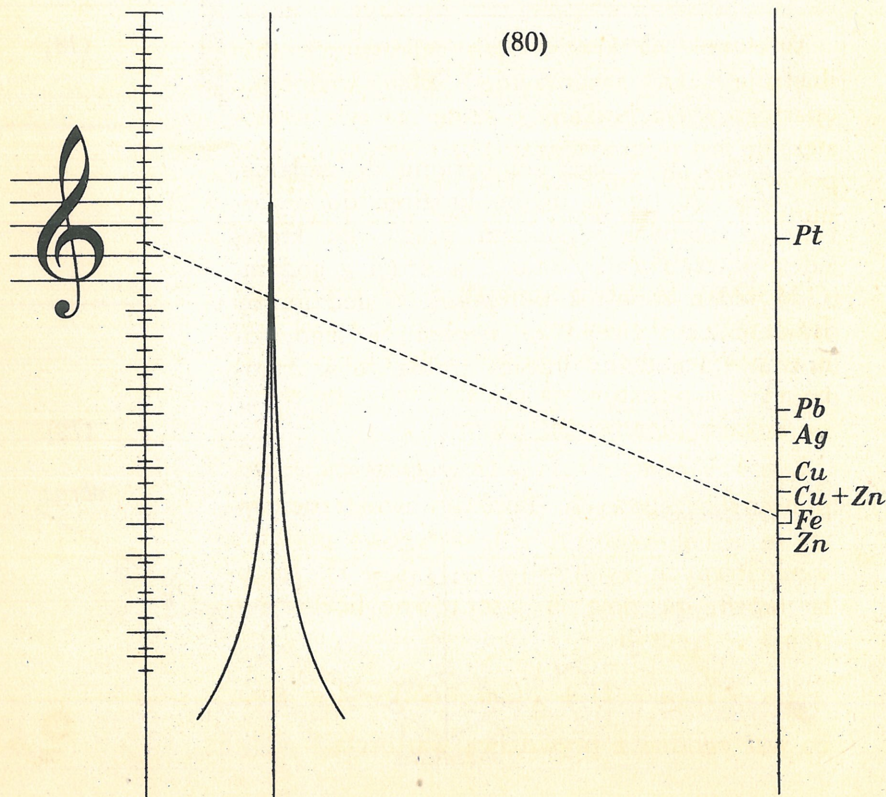
(79)



Można konstruować także nomogramy bez skali liczbowych. Jest wzór Mersenne'a

$$n = \frac{1}{2Lr}\sqrt{\frac{P}{\pi d}}$$

na liczbę n drgań na sekundę struny o długości L metrów, mającej przekrój o promieniu r milimetrów, napiętej ciężarem P kilogramów, zrobionej z materiału o gęstości d gramów na centymetr sześcienny; we wzorze tym $\pi = 3{,}14159\ldots$ Gdy ograniczymy się do strun o długości 1 metra, napiętych ciężarem 100 kg, będziemy mogli zbudować nomogram (80), który pozwoli odczytać promień przekroju drutu, gdy dany jest



materiał i wysokość tonu. Tu na przykład linia kropkowana pokazuje na środkowej iglicy promień struny żelaznej (Fe) dającej ton a. Nomogram zrobiono naprzód liczbowo: zlogarytmowano wzór Mersenne'a i użyto skal logarytmicznych jak na suwaku, a potem zamiast skali drgań użyto klucza wiolinowego, który jest też skalą; zamiast ciężarów gatunkowych napisano nazwy metali, które je mają, a zamiast liczb określających promienie narysowano iglicę o odpowiednich przekrojach. Można tu także, znając materiał i przekrój, znaleźć wysokość tonu. Niektóre odstępy między kreskami nutowymi są większe od innych — dlaczego?

Wielobok na kracie liczb całkowitych (81) ilustruje takie twierdzenie: Pole wieloboku opartego wierzchołkami o kratę ma tyle jednostek, ile jest punktów kratowych wewnątrz, plus połowa liczby punktów kratowych na brzegu, minus 1. Na przykład tutaj jest pole równe

$$6 + 11/2 - 1 = 10{,}5\,.$$

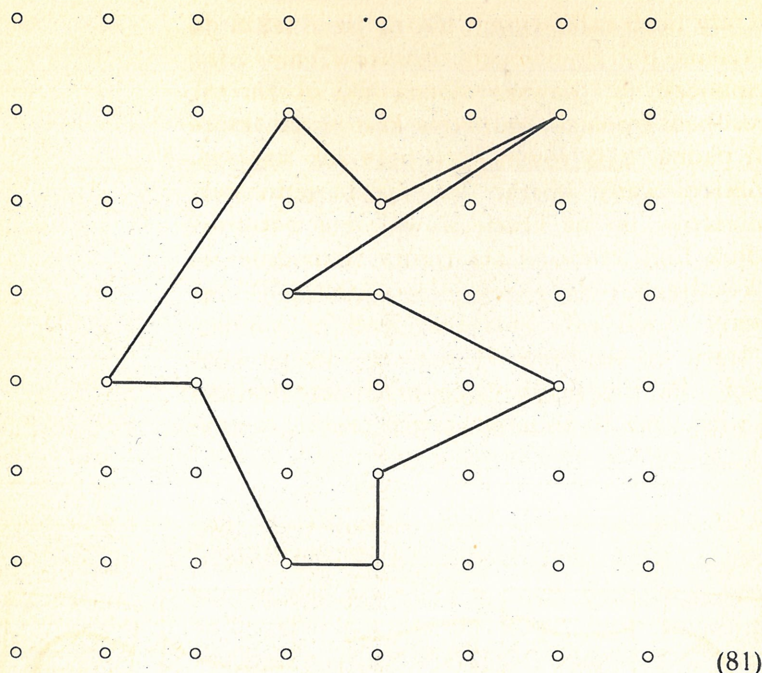
Możemy to łatwo sprawdzić dla prostokąta. Jeżeli jego podstawa ma m jednostek, a wysokość n, to pole jest mn. Na brzegu leżą 4 wierzchołki, po $m - 1$ punktów na podstawach i po $n - 1$ na bokach pionowych, razem

$$b = 4 + 2(m - 1) + 2(n - 1) = 2m + 2n$$

punktów brzegowych. Punkty wewnętrzne tworzą $m - 1$ kolumn i $n - 1$ szeregów; punktów wewnętrznych jest $i = (m - 1)(n - 1)$. Reguła mówi, że pole A jest równe liczbie $i + b/2 - 1$, czyli

$$(m - 1)(n - 1) + \frac{1}{2}(2m + 2n) - 1 = mn,$$

co jest zgodne z prawdziwą wartością.



(81)

Teraz zauważmy, że z dwóch wieloboków o wspólnym boku można zrobić jeden, usuwając ten bok; otóż liczba $i + b/2 - 1$ dla całego wieloboku jest równa sumie odpowiednich takich liczb dla wieloboków składowych (dlaczego?). Wobec tego liczba $i + b/2 - 1$ dla trójkąta otrzymanego z przepołowienia prostokąta przekątną jest równa połowie odpowiedniej liczby dla prostokąta, a więc (wobec sprawdzenia reguły dla prostokąta) daje pole trójkąta. Ale z takich trójkątów możemy złożyć każdy wielobok kratowy przez dodawanie i odejmowanie; w końcu otrzymujemy regułę

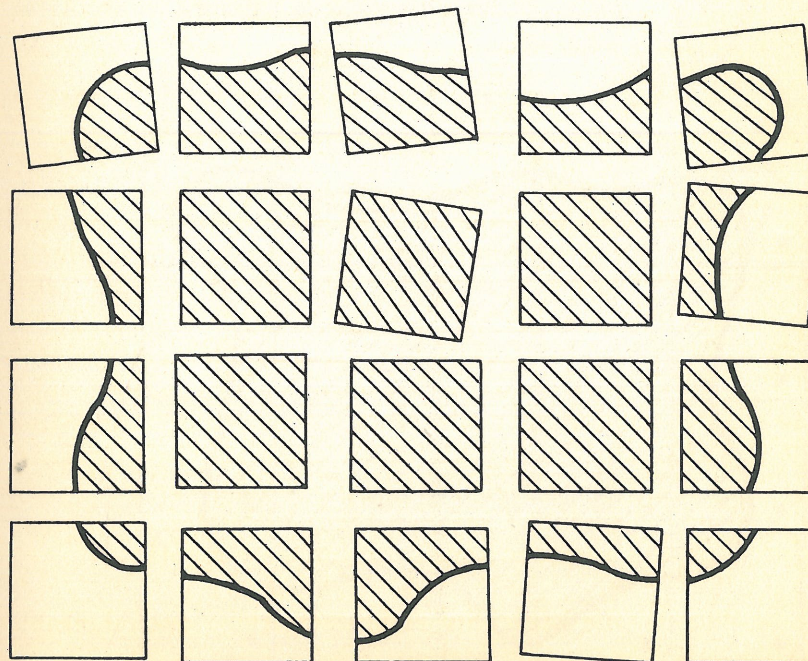
$$A = i + b/2 - 1$$

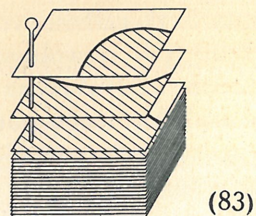
dla każdego wieloboku opartego wierzchołkami o punkty kratowe.

Kraty liczb całkowitych można użyć także do mierzenia pól dowolnych obszarów, nie tylko wielobocznych. Zawsze można taki obszar tak przesunąć, by liczba punktów kratowych, które weń padną, była równa jego polu lub większa.

Zacieniowany obszar (82) ma 11 jednostek. Umieśćmy go na kracie dowolnie i potnijmy wzdłuż linij kraty. Cała figura rozpadnie się na kwadraciki; złożywszy je wszystkie (83), będziemy mogli cały stos tak przekłuć szpilką, by trafić co najmniej 11 razy w zacieniowane części. Bo przypuśćmy, że nigdy nie trafimy we więcej niż 10 zacieniowanych części; to zna-

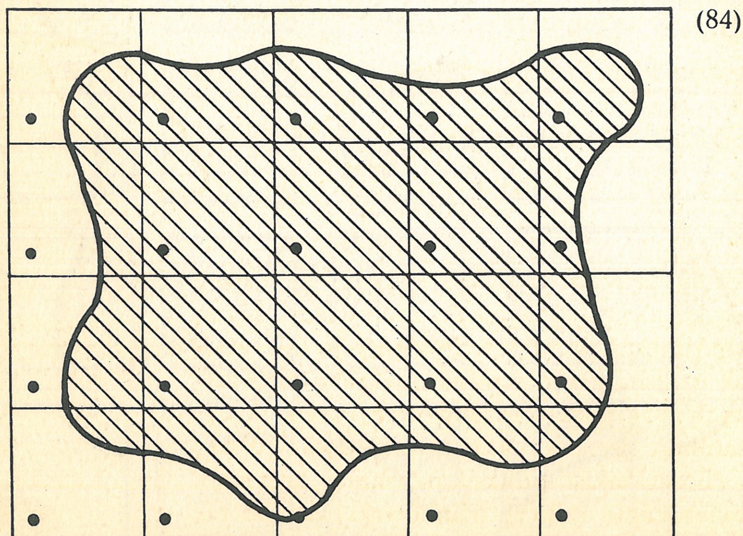
(82)





(83)

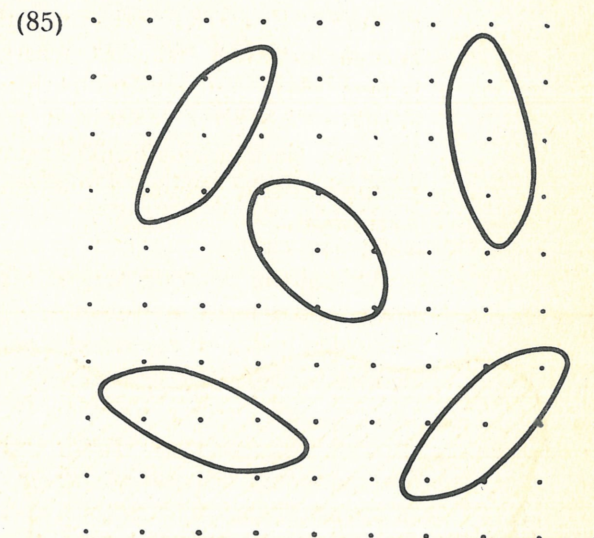
czyłoby, że dolny kwadrat jest pokryty rzutami tych części co najwyżej 10 razy, więc cały obszar ma co najwyżej 10 jednostek, — a wiemy, że ma 11. Znalazłszy szukany punkt rozkładamy znowu kwadraty tak, jak leżały przed pokrajaniem (84). Zobaczymy 11 lub więcej śladów szpilki na obszarze; wystarczy go przesunąć tak, by jeden ślad padł na punkt kratowy, a wszystkie padną i obszar obejmie co najmniej 11 punktów kratowych.



(84)

Gdy nie trzeba wielkiej dokładności, można użyć kraty liczb całkowitych do obliczania pól. Tak na przykład można zmierzyć powierzchnię liścia kładąc na nim kalkę lub płytkę celuloidową zaopatrzoną w punkty tak, jak na (81), ale w odstępach 3,16 mm. Policzmy punkty padające na liść: jeżeli jest ich n, to powierzchnia liścia ma $10n$ mm² (w przybliżeniu). Można ulepszyć tę metodę ustawiając punkty tak, jak wskazuje (85). W jakich odstępach powinny leżeć?

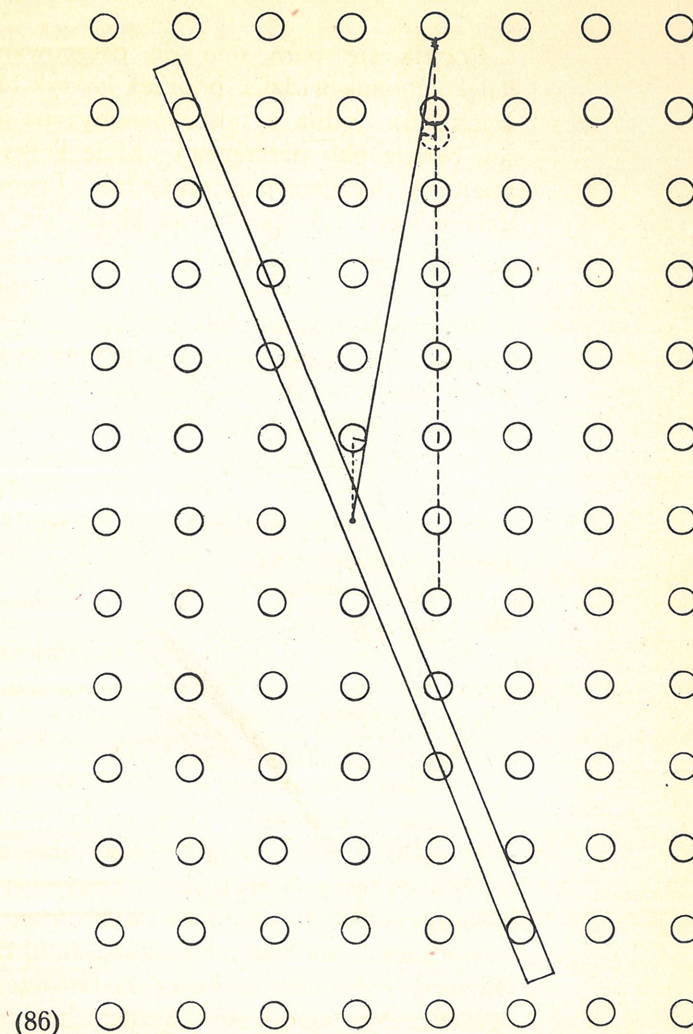
(85)



Weźmy krzywą wypukłą o polu 4, mającą środek (środek — to punkt połowiący każdą cięciwę przezeń wiodącą). Połóżmy ją tak, żeby środek padł na jeden z punktów kraty liczb całkowitych (85), poza tym dowolnie; wtedy krzywa zamknie jeszcze co najmniej dwa punkty kraty (licząc także punkty na samej krzywej). To twierdzenie odkrył Minkowski; dowód nie jest łatwy.

Przyda się nam ono do oszacowania, jak daleko można widzieć poprzez las tyk chmielowych (86). Jedną z tyk usuwamy; na jej miejscu będzie oko patrzącego. Małe kółka o promieniu r przedstawiają rzuty tyk. Promień widzenia sięga tak daleko, aż zbliży się o mniej niż r do jakiegoś punktu kratowego. Narysujmy dowolną prostą przez punkt obserwacyjny, odetnijmy na niej po każdej stronie $1/r$ i uważajmy tak powstały odcinek za symetralną prostokąta o podstawie $2r$. Prostokąt ma pole 4, a jego środek jest punktem kratowym: według twierdzenia Minkowskiego jeszcze co najmniej dwa punkty kratowe padną w jego wnętrze lub na boki. Kółeczka otaczające te punkty przetną wobec tego symetralną lub dotkną — i zamkną widok. A więc nie można widzieć dalej niż na $1/r$.

Ale można widzieć niemal tak daleko. Spójrzmy mianowicie w kierunku stycznym do najbliższego kółka w tej samej kolumnie; linię widzenia przedłużmy do najbliższej kolumny i obliczmy, jak daleko przecina (kreskowaną) linię środków tej kolumny. Duży trójkąt prostokątny jest podobny do małego; mamy obliczyć przeciwprostokątną h dużego. Podobieństwo daje proporcję $h : 1 = 1 : r$, a więc $h = 1/r$. Ale nie możemy widzieć tak daleko, jak h, bo w najbliższej kolumnie są kółka zasłaniające widok. Przesuńmy takie kółko wzdłuż linii środków, aż dotknie linii widzenia. Powstanie trójkąt przystający do małego. Jego bok leżący na linii widzenia ma długość $1 - r^2$ i to trzeba odjąć od $1/r$, aby otrzymać zasięg wzroku w najgorszym razie. Wprawdzie linia widzenia już wcześniej dotyka kółka w kolumnie, w której

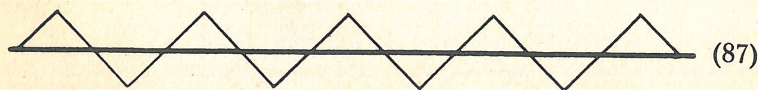

(86)

stoimy, ale mała zmiana kąta pozwoli uniknąć tej przeszkody przy dowolnie małym skróceniu widoku. Tak więc wzrok nasz dosięgnie pewnych punktów w odległości niemal równej

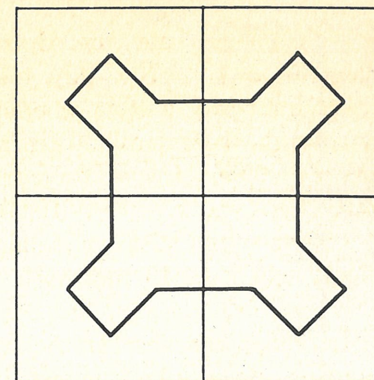
$1/r - \sqrt{1 - r^2}$, ale nie dotrze do punktów odległych o $1/r$. Np. gdy tyki mają średnicę 5-centymetrową, a stoją w odstępach 50-centymetrowych, weźmiemy 50 cm za jednostkę i będzie $r = 0{,}05$, $1/r = 20$ jednostek $= 10$ metrów, $1/r - \sqrt{1 - r^2} = 19{,}0013$ jednostki $=$ $= 9{,}50$ m i najdalszy widzialny punkt będzie odległy o 9,5 do 10 metrów.

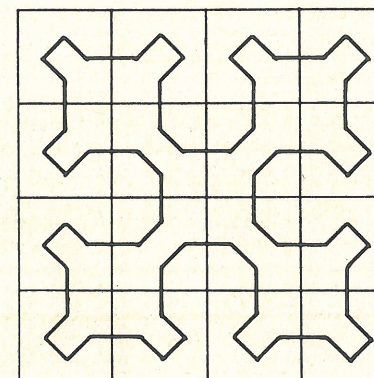
Mierzenie pól jest łatwiejsze niż mierzenie długości. Bo gdy kontur jest dany z pewną dokładnością, możemy oszacować pole przezeń zamknięte z błędem, który maleje w miarę, jak dokładność się powiększa, i może być dowolnie zmniejszony.

Inaczej jest z długością. Dwie linie krzywe leżące bardzo blisko siebie mogą różnić się znacznie długością: zygzakowata linia (87), na przykład, jest o blisko 40% dłuższa od prostej.


(87)

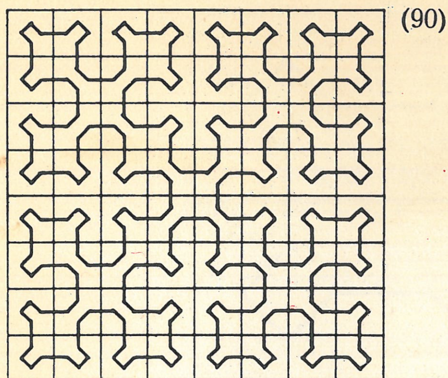
Są także linie o długości nieskończonej, jeżeli uznajemy istnienie rzeczy poprawnie określonych w matematycznym języku i nie dbamy o materialne modele. Matematycy potrzebują takich linii krzywych do celów teoretycznych. Takim problematem teoretycznym jest na przykład pytanie, jak określić krzywą przechodzącą przez każdy punkt kwadratu, to znaczy przez każdy punkt wnętrza i brzegu. Sierpiński rozwiązuje to zaczynając od wieloboku (88), łącząc potem cztery podobne wieloboki (89) w krzyż, po czym spaja cztery figury podobne

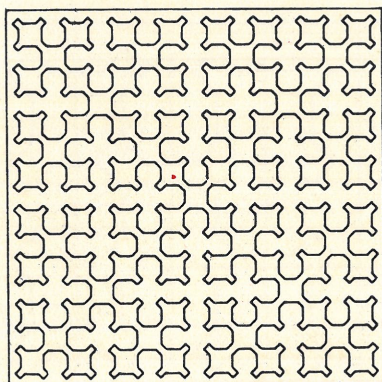

(88)

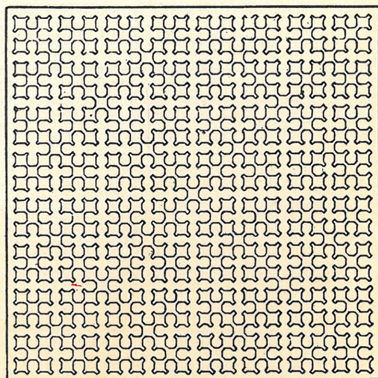

(89)

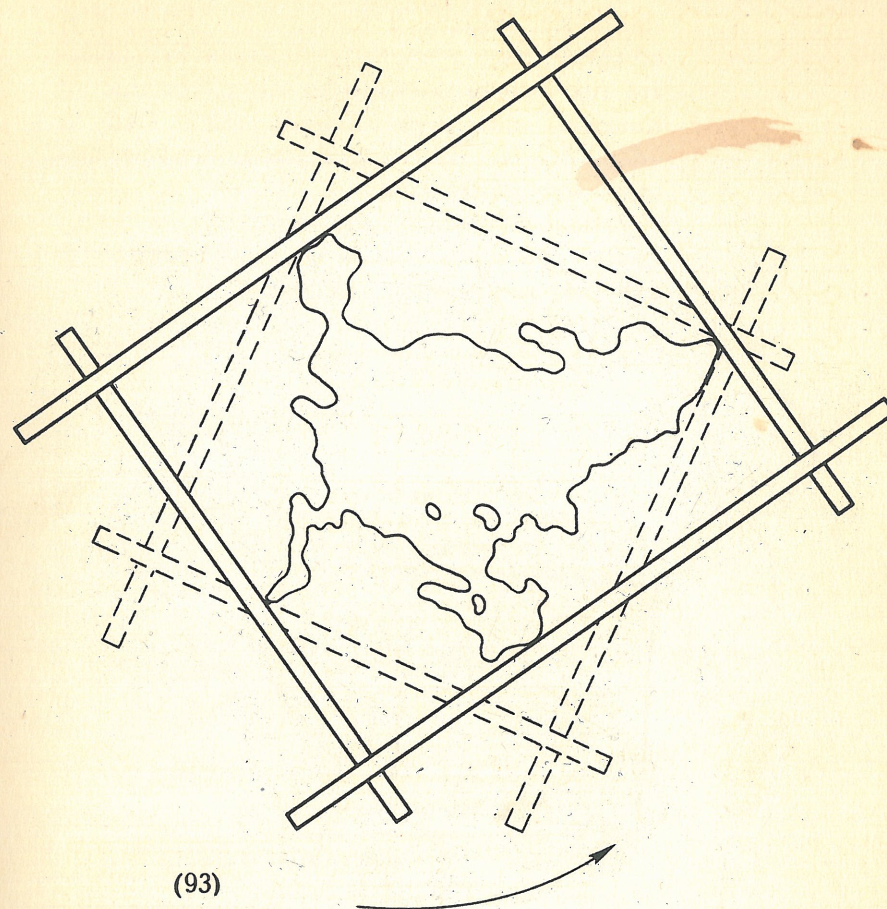
do krzyża (90) i tak dalej (91), coraz powtarzając (92) poprzednią konstrukcję. Granicą tych przybliżeń jest krzywa wypełniająca kwadrat: możemy ją uważać za tor ruchomego punktu i każdemu miejscu w kwadracie przypisać dokładnie chwilę, gdy ruchomy punkt przejdzie przez to miejsce. Krzywa ta ma nieskończoną długość. Nie można jej narysować w ostatecznym, doskonałym stadium. (Dlaczego?).

Wpatrując się w rysunek (92) widzimy pojawiające się i znikające linie ukośne. (Dlaczego?).


(90)


(91)

(92)


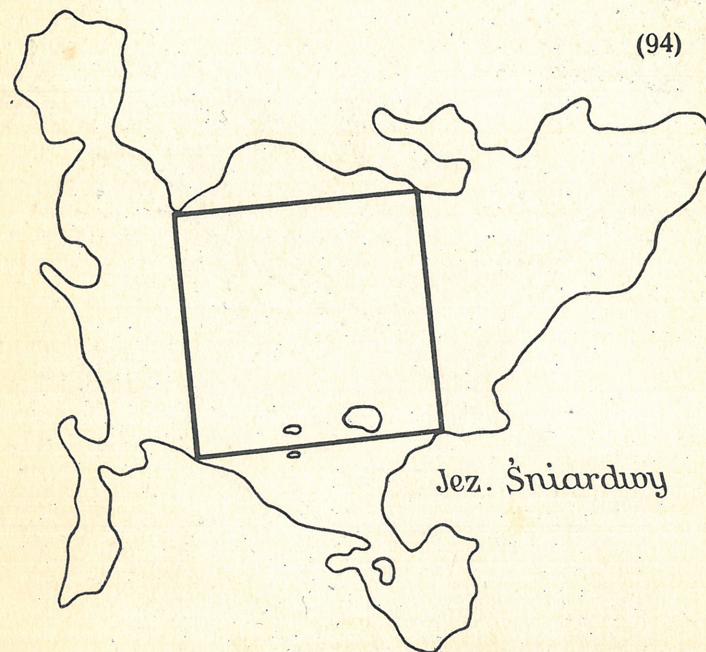

(93)

Mając obszar ograniczony krzywą, jak na przykład jezioro Śniardwy (93), możemy opisać na nim kwadrat. Łatwo się o tym przekonać biorąc naprzód parę stycznych równoległych i drugą taką parę prostopadłą do pierwszej, a potem obracając całą ramkę dokoła konturu. Po obrocie o 90^0 para listew poziomych

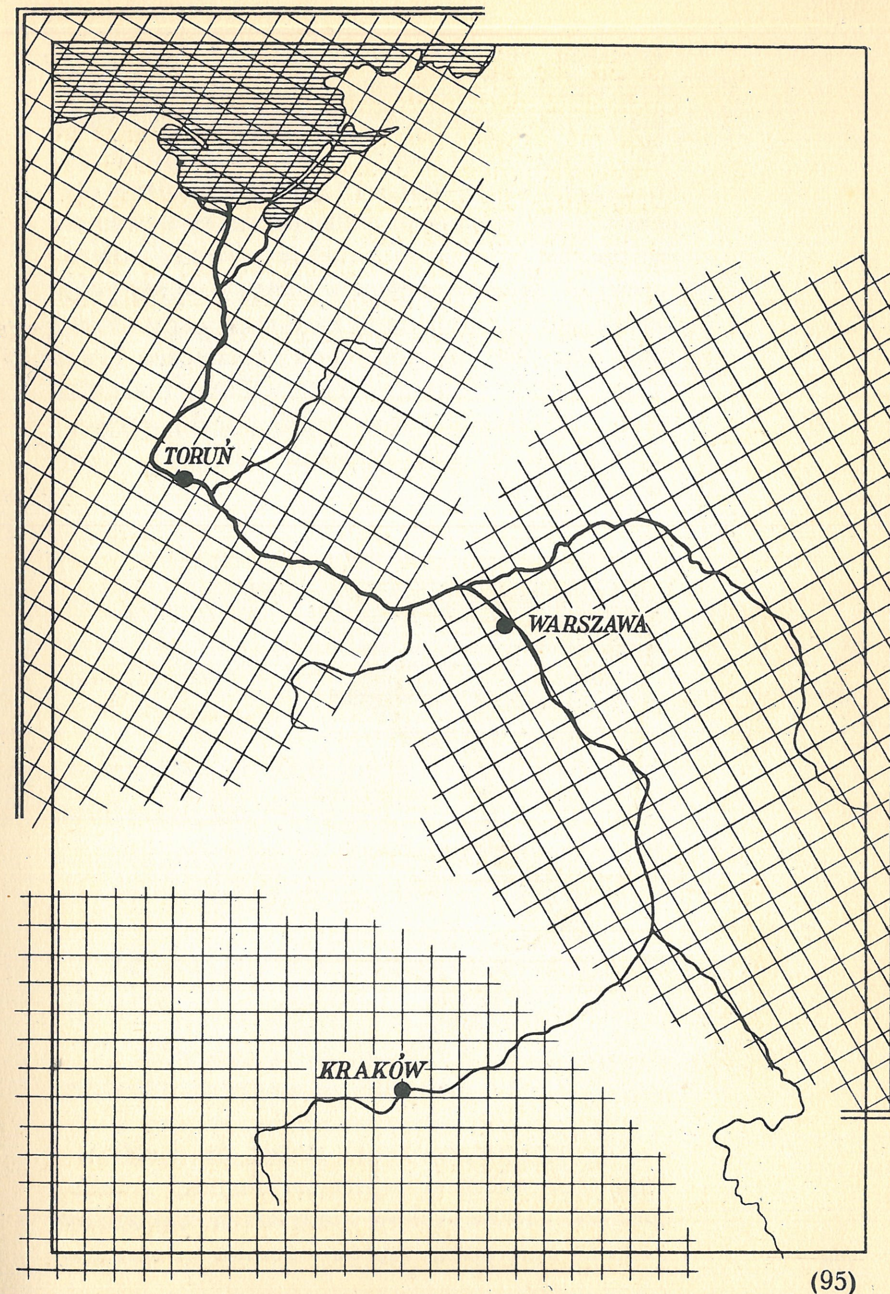
stanie się pionowa i na odwrót. Jeżeli więc odległość pary równoległych listew była większa niż drugiej pary, to po obrocie stanie się mniejsza, musi być zatem moment, kiedy te odległości się zrównają, a wtedy właśnie styczne utworzą kwadrat.

Znacznie trudniej udowodnić, że w każdy kontur zamknięty można wpisać kwadrat; jednak (94) rzeczywiście tak jest.

(94)

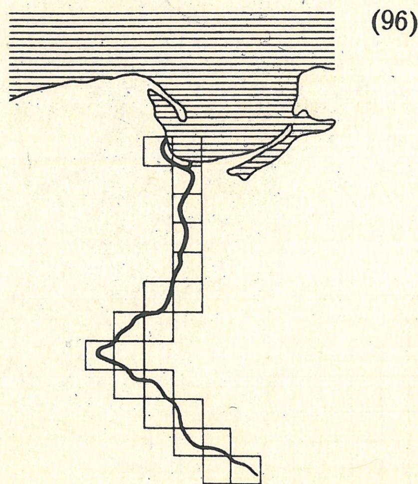


Do mierzenia długości można użyć siatki kwadratowej, jakby szachownicy. Na przezroczystej kalce jest narysowana siatka, której oczka są kwadratami o bokach 3,82 mm. Jedna



(95)

gromada równoległych siatki jest nachylona pod kątem 30^0 do brzegu kalki. Chcąc na przykład zmierzyć długość Wisły kładzie się kalkę (95) brzegiem na ramce mapy i idąc od źrodła z biegiem rzeki posuwa się ruchem wieży szachowej (96) z pola na pole, potem powtarza się tę podróż od źródła do ujścia po kalce odwróconej na drugą stronę, a w końcu — przy położeniu jednej z linij siatki na ramce mapy. Przez cały czas liczy się posunięcia; ostateczna liczba daje długość w milimetrach. Tutaj podziałka jest 1 : 5 000 000, więc trzeba liczbę pomnożyć przez 5, aby otrzymać długość Wisły w kilometrach.


(96)

Aby wytłumaczyć, jak działa ów *longimetr*, zmierzmy odcinek prosty o długości L milimetrów. Liczba kroków wieży szachowej wzdłuż odcinka daje sumę rzutów odcinka na oba kie-

runki siatki, jeżeli bok oczka weźmiemy za jednostkę. Kładąc longimetr trzy razy, otrzymujemy sumę rzutów na sześć kierunków. Z opisu widać, że te kierunki tworzą gwiazdę o promieniach zamykających kąty 30^0. Jeżeli odcinek zawierał z początku kąt α z jedną linią siatki, to wszystkie kąty będą

$$\alpha + 0^0,\quad \alpha + 30^0,\quad \alpha + 60^0,$$
$$\alpha + 90^0,\quad \alpha + 120^0,\quad \alpha + 150^0.$$

Suma rzutów będzie

$$L\{\sin(\alpha + 0^0) + \sin(\alpha + 30^0) + \\ + \sin(\alpha + 60^0) + \sin(\alpha + 90^0) + \\ + \sin(\alpha + 120^0) + \sin(\alpha + 150^0)\}$$

Nie wiemy, jakie jest α, ale można obliczyć, że suma $\{\ \}$ jest najmniejsza dla $\alpha = 0^0$, a największa dla $\alpha = 15^0$. A więc suma rzutów wynosi co najmniej

$$L\,(0 + 1/2 + \sqrt{3}/2 + 1 + \sqrt{3}/2 + 1/2) = 3{,}732\ L,$$

a co najwyżej

$$L\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) = 3{,}864\ L.$$

Za jednostkę wzięliśmy 3,82 mm, więc trzeba podzielić powyższe wyniki przez 3,82, aby mieć sumę rzutów w milimetrach. To da 0,977 L i 1,011 L, zamiast prawdziwej długości L. To znaczy, że longimetr mierzy długość odcinka z błędem od $-2{,}3\%$ do $1{,}1\%$. Ale każdą krzywą można uważać za złożoną z krótkich

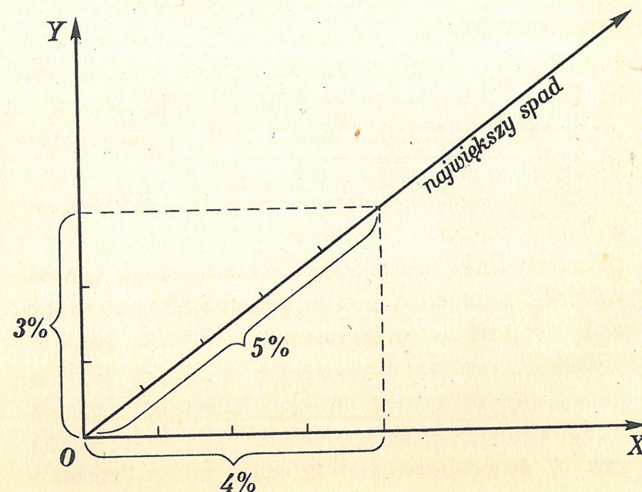
odcinków prostych, więc błąd względny dla całej krzywej też nie przekroczy tych granic; zwykle będzie nawet mniejszy. (Dlaczego?).

Na niektórych mapach są wyrysowane poziomice (izohipsy), które uwidaczniają pionową konfigurację terenu. Pomiar ich łącznej długości pozwala obliczyć średnią stromość obszaru.

Można do tego użyć longimetru licząc przecięcia jego linij z poziomicami.

Chcąc znaleźć kierunek i wielkość największego spadu pochyłego płaskiego terenu (ma to praktyczne znaczenie, na przykład przy drenowaniu gruntu) nie trzeba trudnych pomiarów ani obliczeń: mierzy się spad w dowolnym kierunku OX i odcina na linii OX na mapie tyle centymetrów, ile % ma spad,

(97)



potem robi się to samo dla kierunku OY prostopadłego do OX i uzupełnia rysunek do prostokąta; jego przekątna wskaże kierunek i wielkość największego spadu; w przykładzie narysowanym (97) największy spad ma 5%. Taśma miernicza, łata z podziałką i celownik z libelą, oto cały przybór potrzebny.

Wciąż jeszcze jest otwarta kwestia długości linij danych przez przyrodę, a nie przez matematyczną definicję. Gdy się mierzy długość rzeki, napotyka się problemat drobnych zakrętów jej biegu. Niektóre kraje mają za swoje granice takie kręte rzeki lub grzbiety górskie. Biorąc coraz to szczegółowsze mapy i zwiększając odpowiednio dokładność pomiarów możemy sprawdzić, że długość wzrośnie tak, jak tylko zechcemy.

Longimetr jest środkiem przeciw tej niedogodności, ale ma tę wadę, że jego dokładność jest ograniczona wielkością rzeczywistego kwadratu, który na mapie wyobraża się kwadracikiem longimetru. Ta wielkość zmienia się wraz z podziałką mapy i trzeba by do każdego celu mieć przepisane podziałki i właściwe longimetry; nie łatwo byłoby ułożyć takie przepisy.

Można jednak mierzyć długości (jak zauważyliśmy mówiąc o poziomicach) licząc liczbę n przecięć linij równoległych na kalce z krzywą na mapie. Jeżeli d jest odstępem równoległych, a k — liczbą różnych położeń kalki, to

$$L = \frac{n\pi d}{2k}$$

jest w przybliżeniu długością. Uzyskuje się k

położeń obracając kalkę o kąt $180^0/k$ od jednego położenia do następnego.

To jeszcze nie załatwia paradoksu długości. Aby go usunąć, umówmy się, że na każdej linii odrzucimy z rachunku jedenaste i dalsze przecięcia z krzywą. Tak otrzymamy coś, co nazwiemy L_{10}, długość rzędu 10. To pojęcie jest wolne od paradoksu długości; gdy będziemy zwiększać bogactwo szczegółów na mapie i dokładność pomiaru przez zmniejszanie d i zwiększanie k, to — przy ograniczeniu liczonych przecięć do dziesięciu — liczby L, uzyskane ze wzoru, będą się zbliżały coraz bardziej do granicy, którą jest idealna długość L_{10}. Tak samo można określić długość innych rzędów: $L_1, L_2, \ldots, L_m, \ldots$

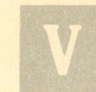
Ta zasada pozwala tworzyć reguły pomiaru wolne od takich jednostek, jak kilometry, mile, lub wiorsty: do porównywania długości granic krajów można by na przykład przyjąć wszędzie długość rzędu 12.

Niech L'_m będzie długością lewego brzegu Wisły, L''_m długością prawego, obie m-tego rzędu. Paradoks:

$$\lim_{m\to\infty} L'_m = \infty, \qquad \lim_{m\to\infty} L''_m = \infty$$

pojawia się tu w innej formie.

Ale możemy spodziewać się, że granica stosunku L'_m/L''_m jest skończona. Można ją określić tak dokładnie, jak chcemy: trzeba tylko wybrać m dostatecznie wielkie i zastosować kalki liniowane, jak wyżej opisano. Tym sposobem możemy zmierzyć stosunek długości obu brzegów Wisły, chociaż nie znamy owych samych prawdziwych długości.

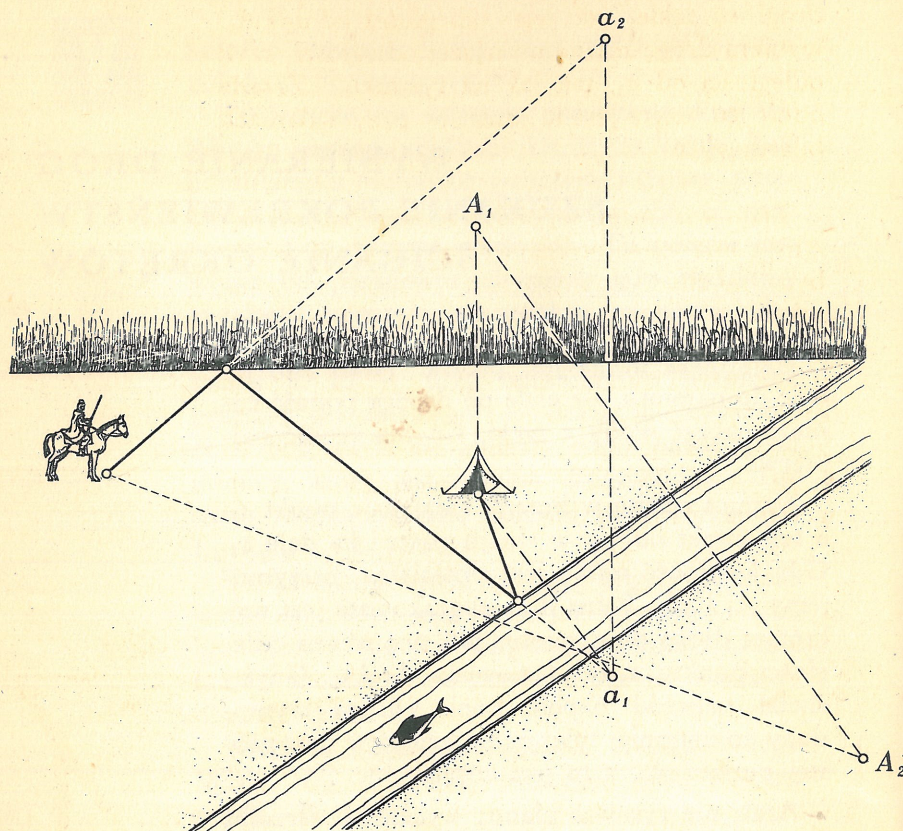


WYBIERANIE DRÓG
SZUKANIE POKREWIEŃSTW
ŚCIGANIE OKRĘTÓW

Najkrótsza droga jest prosta. Arab (98) jedzie do namiotu, ale chce po drodze popaść konia i nabrać wody z rzeki. Co ma zrobić najpierw?

Namiot odbity w brzegu rzeki daje punkt a_1, a ten punkt odbity w skraju pastwiska daje a_2. Gdy kolejność odbić jest przeciwna, otrzymujemy A_1 i A_2. Pełna linia zygzakowata jest najkrótszą drogą do namiotu: jest ona równa odległości punktu a_2 od stanowiska Araba. Gdyby chciał naprzód napoić konia, droga wyniosłaby co najmniej tyle, co odległość w linii prostej punktu A_2, a to jest więcej.

Arab nie rysował planu; wycelował strzelbą w punkt zbiegu pastwiska z rzeką, a widząc, że ten punkt leży na lewo od namiotu, pojechał na lewo. Aby wytłumaczyć jego zachowanie, zauważmy, że punkty a_2 i A_2 można znaleźć nie wiedząc, gdzie stoi jeździec. Wszystkie jego stanowiska dzielą się na bliższe a_2, bliższe A_2 i równo odległe od a_2 i A_2. Ostatnie tworzą linię prostą; są to punkty obojętne. Takim punktem obojętnym jest punkt zbiegu rzeki z pastwiskiem, ale także i namiot. Bo gdy Arab wyjeżdża z namiotu do rzeki, potem na pastwisko i wraca, i zdaje mu się, że ta droga jest krótsza



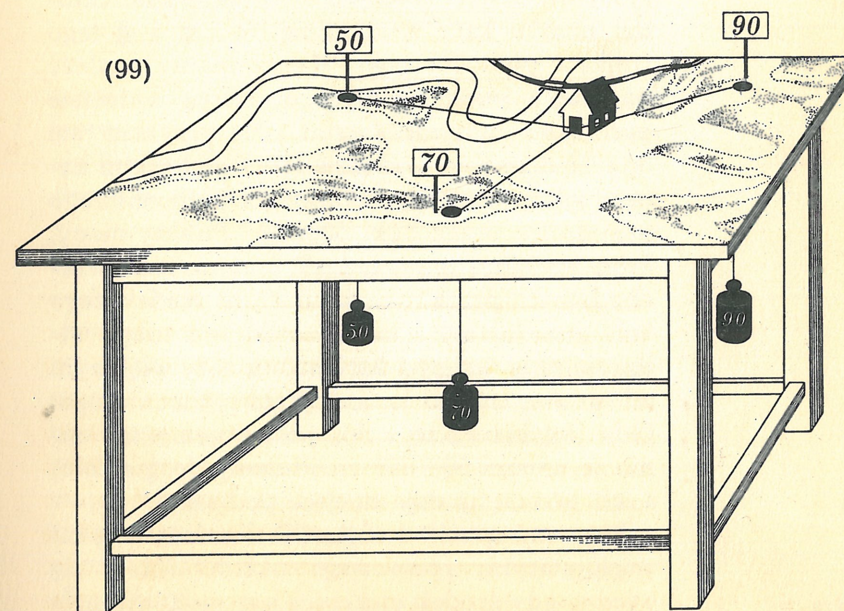
(98)

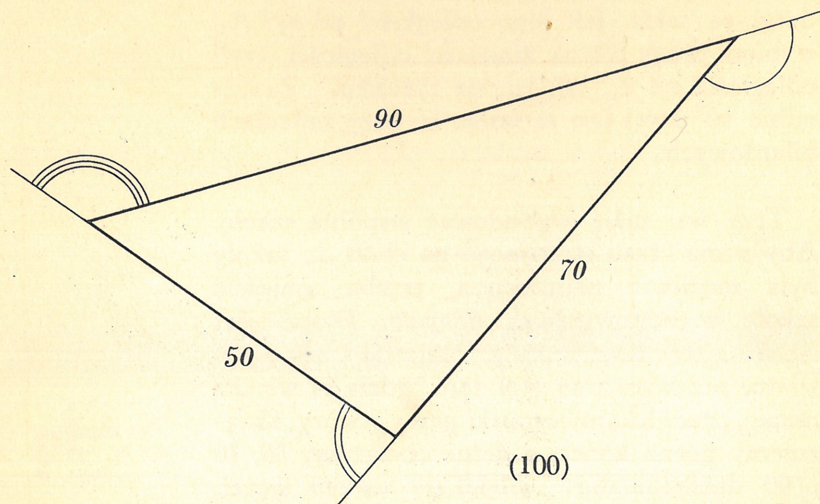
niż przez pastwisko i brzeg rzeki do namiotu, to zechce skrócić sobie drugą drogę odbywając pierwszą w przeciwną stronę; ponieważ ta druga już była najkrótsza, więc przekona się, że uległ złudzeniu. Mamy więc dwa punkty obojętne: zbieg i namiot. Linia podziału musi przechodzić przez obydwa. Gdy Arab widzi punkt zbiegu na lewo od namiotu, dowiaduje się, że sam jest po lewej stronie linii podziału, to znaczy bliżej a_2 niż A_2. Ponieważ najkrótsze

drogi są takie, jak jego odległości od a_2 i A_2, wybiera drogę równą mniejszej odległości, czyli odległości od a_2, tak jak na rysunku. Zasada odbić tu użyta jest ta sama, co przy zadaniach bilardowych.

Trzy wsi mają wybudować wspólną szkołę. Aby suma czasu straconego na chód do szkoły była możliwie najmniejsza, trzeba umieścić szkołę w odpowiednim miejscu. Dzieci jest 50, 70 i 90. Kładziemy na stole (99) mapę powiatu, przewiercamy stół tam, gdzie są wsi na mapie, przewlekamy sznurki przez otwory, związujemy górne końce, a dolne obciążamy 50, 70 i 90 dekagramami: gdzie się ustawi węzeł, powinna stanąć szkoła.

(99)

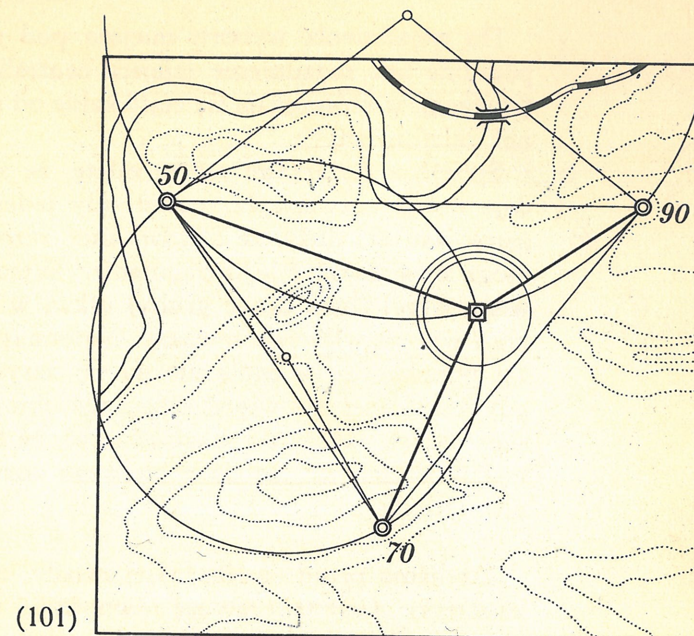




(100)

Ale psucie stołu nie jest konieczne. Najpierw rysujemy trójkąt (100) o bokach 50, 70 i 90. Chodzi nam o kąty zewnętrzne, ∢, ∢ i ∢ tego trójkąta pomocniczego. Teraz mamy znaleźć na mapie punkt, z którego wsi są widoczne pod tymi samymi kątami. Na przykład wsi 50 i 90 mają być widziane (101) pod takim kątem, jak zewnętrzny kąt trójkąta pomocniczego utworzony przez boki 50 i 90. Punkty mapy, które spełniają ten warunek, leżą na kole przechodzącym przez wsi 50 i 90, a środek tego koła znajdujemy z twierdzenia, że z niego widzi się obie wsi pod kątem dwa razy większym od wewnętrznego kąta trójkąta pomocniczego. Gdy już mamy to koło, postępujemy tak samo ze wsiami 50 i 70; znajdujemy drugie koło, a ich przecięcie daje miejsce pod szkołę.

Pierwszy sposób z ciężarkami polega na prawach statyki: równowaga układu ustala się wtedy, gdy środek ciężkości jest możliwie naj-



(101)

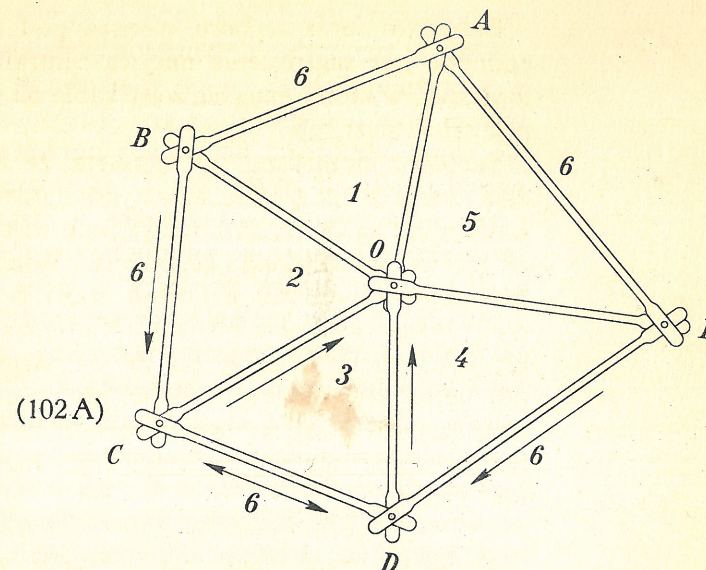
niżej. Gdy przesuwamy węzeł, środek ciężkości porusza się w górę lub w dół wskutek skracania się lub wydłużania sznurków pod stołem: jego droga w dół jest proporcjonalna do sumy przyrostów sznurków, pomnożonych przez ciężarki na nich wiszące. Wobec tego środek ciężkości będzie najniżej, gdy suma iloczynów długości sznurków nad stołem przez ciężarki będzie najmniejsza. Ale to zajdzie właśnie wtedy, gdy suma dróg do szkoły będzie najmniejsza, bo ta suma jest równa sumie iloczynów sznurków na mapie przez ciężarki. (Każdy centymetr na mapie oznacza kilometr na ziemi, a każdy dekagram oznacza jedno dziecko, suma w centymetro-dekagramach daje sumę w kilometro-dzieciach).

Do zagadnienia wyboru miejsca pod szkołę podobne jest zagadnienie miejsca centrali telefonicznej, w której mają się zejść kable od skrzynek telefonicznych.

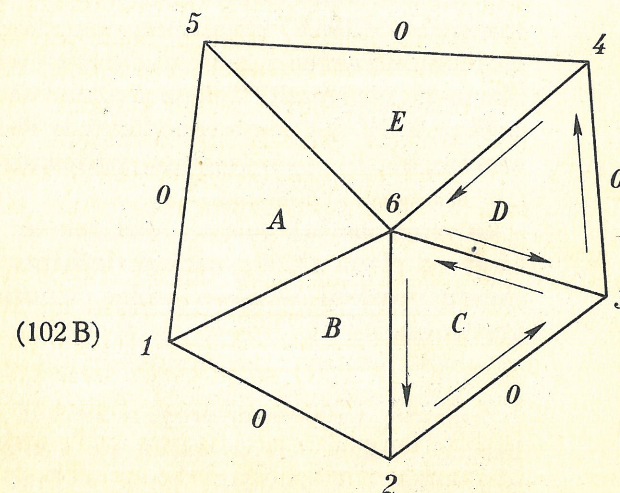
Sposób z ciężarkami ma tę zaletę, że zawsze daje dobre rozwiązanie, nawet gdy jeden ciężarek jest taki duży, że obydwa inne razem nie mogą zrównoważyć jego ciągnienia. Wtedy bowiem węzeł (byle dosyć gruby) utkwi w otworze i wskaże właściwe miejsce. Natomiast trójkąt pomocniczy w ogóle nie da się narysować, gdy jedna wieś ma więcej dzieci niż obie pozostałe razem. Może się także zdarzyć, że trójkąt będzie istniał, ale nie da właściwego rozwiązania. (Kiedy?).

Użyliśmy przed chwilą takiej zasady, wziętej ze statyki: Gdy trzy siły się równoważą, można narysować trójkąt, którego boki odpowiadają tym siłom co do długości i kierunków. Wystarczy przekręcić odpowiednio rysunek (100), by boki trójkąta ustawiły się równolegle do pełnych linij rysunku (101); to jest właśnie owa zasada, tylko zastosowana przeciwnie: od trójkąta do sił.

Ta uwaga prowadzi do tak zwanych figur odwrotnych Cremony: Gdy mamy np. 10 drążków (102 A) złączonych zatyczkami w punktach *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *O*, to powstaje sześć pól: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Teraz narysujemy figurę odwrotną (102 B), czyli plan sił; tu pola będą oznaczone literami, a wierzchołki liczbami. Na rysunku (102 A) wierzchołek *C* jest wspólny polom 2, 3 i 6 i łączy drążki *BC*, *OC* i *DC*; na rysunku (102 B) pole *C* ma wierzchołki 2, 3 i 6 i sąsiaduje z polami *B*, *O*, *D*, a granice *BC*, *OC*, *DC*



(102 A)



(102 B)

są odpowiednio równoległe do drążków *BC*, *OC*, *DC* figury (102 A). Cały plan sił jest tak zbudowany.

Gdy w przegubie *C* konstrukcji działają siły w kierunku strzałek, a ich wielkości są równe bokom pola *C* planu, to są one w równowadze. To samo odnosi się do innych punktów. Na przykład siły w przegubie *D* są wyznaczone przez boki pola *D*, ale strzałka w drążku *D* teraz wskazuje ku *D*, bo według zasady równości akcji i reakcji drążek pchający *C* pcha *D* z tą samą siłą. A więc umieściwszy naprzód strzałki na polu *C* planu, musimy umieścić strzałkę 6—3 na polu *D* przeciwnie do strzałki 3—6 na polu *C*. Ponieważ w każdym polu strzałki tworzą obieg zamknięty, więc znajdujemy wszystkie strzałki w *D*, potem w *E* i tak dalej. Tak możemy znaleźć cały plan znając długość jednego boku i zwrot odpowiedniej strzałki. Z tego widać, że znając napięcie w jednym drążku konstrukcji (102 A) znajdziemy wszystkie inne. Gdy ono się zmienia, zmienia się tylko wielkość planu, ale nie kształt. Tak na przykład widzimy, że drążek *OE* jest zawsze poddany sile 26/15 raza większej niż *BC* i jest ciągniony, gdy krążek *BC* jest ściskany. (Dlaczego?).

Gdyśmy szukali miejsca pod szkołę, zaczęliśmy od planu sił, a potem znaleźliśmy kształt układu drążków w równowadze (sznurki były drążkami).

Szukanie najkrótszej drogi może być czasem bardzo trudne. Obóz składa się z kilkunastu namiotów i komendant chce wybrać jeden z nich dla siebie tak, żeby mógł w możliwie najkrótszym czasie obejść stamtąd wszystkie namioty. Przy kilku namiotach można to zadanie rozwiązać wypróbowując po kolei wszystkie możliwości; przy kilkunastu te próby wymagałyby wielu lat pracy.

Postawmy sobie łatwiejsze zadanie: Jak połączyć namioty ścieżkami tak, żeby można przejść od każdego do każdego po ścieżkach i żeby przy tym łączna długość ścieżek była możliwie najmniejsza? Ścieżki mogą się rozgałęziać, ale nie poza namiotami.

Najłatwiej to zrobić tak: Zaczynamy od dowolnego namiotu i łączymy go z najbliższym. Szukamy namiotu najbliższego do pierwszego i namiotu najbliższego do drugiego, porównujemy te odległości i wybieramy namiot bliższy; to będzie trzeci namiot. Mamy już trzy namioty połączone dwiema ścieżkami i znowu do każdego z trzech namiotów szukamy najbliższego; najbliższy z tych najbliższych będzie czwartym namiotem. Tak postępujemy dalej, aż wszystkie namioty zostaną połączone. Będzie ścieżek o 1 mniej niż namiotów, a wszystkie razem utworzą dendryt, to znaczy układ ścieżek łączących wszystkie namioty tak, że nie ma dróg okrężnych. Takich dendrytów jest więcej, ale znaleziony przez nas jest najkrótszy ze wszystkich. Rysunek (103) pokazuje dendryt najkrótszy, czyli minimalny, rozpięty na polskich miastach wojewódzkich. Każde z miast łączymy z najbliższym mu miastem; będą to połączenia rzędu I, które utworzą jeden lub kilka dendrytów rzędu I. Teraz wyobraźmy sobie, że łączymy wszystkie punkty jednego dendrytu z punktami innego dendrytu i z tych połączeń wybieramy najkrótsze; będzie to *odległość* między tymi dendrytami. Gdy każdy z dendrytów rzędu I połączymy z najbliższym



(103)

mu dendrytem, otrzymamy połączenia rzędu II, które razem z połączeniami rzędu I utworzą jeden lub kilka dendrytów rzędu II. Łącząc każdy z dendrytów rzędu II z najbliższym mu

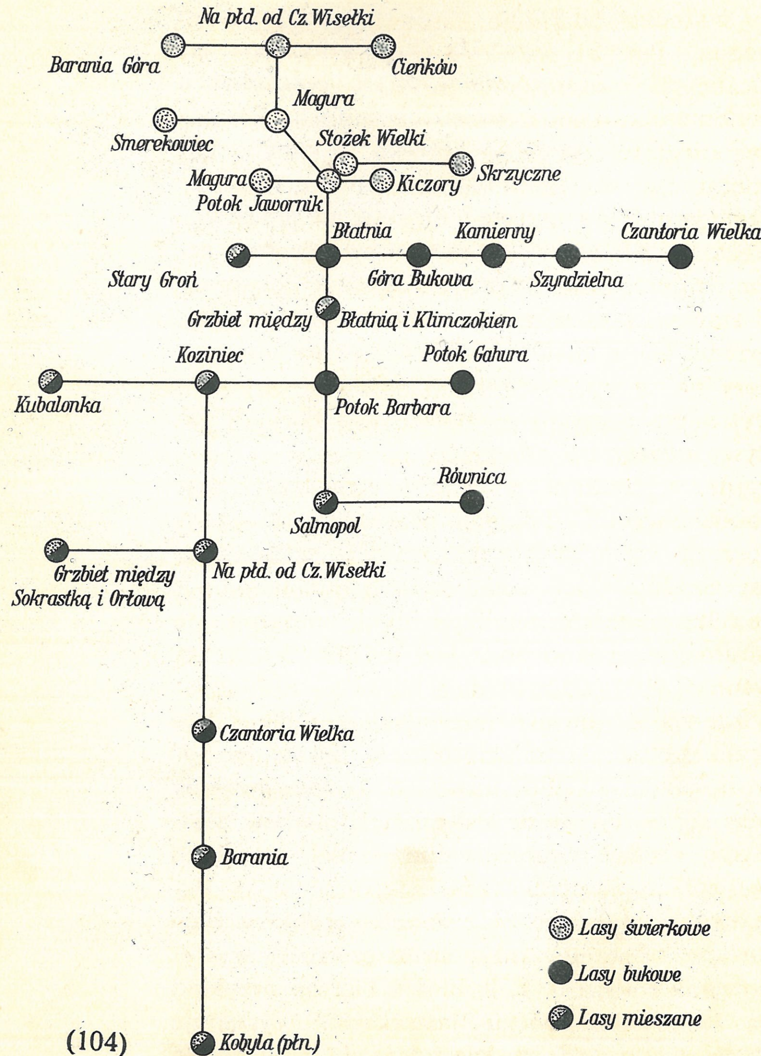
dendrytem otrzymamy dendryty rzędu III — i tak dalej, aż wszystkie miasta zostaną objęte jednym dendrytem.

Dendryt miast przed chwilą narysowany mało daje ciekawego, bo zwykła mapa informuje nas nie tylko o odległościach miast połączonych w dendrycie, ale i o wszelkich innych. Inaczej jest z przedmiotami, o których za chwilę będziemy mówili, ponieważ nie są one dane na płaszczyźnie jak miasta, ale leżą w przestrzeniach o bardzo wielu *wymiarach* (czytaj: cechach), my zaś tworząc dendryt postępujemy jak botanik, który zasusza przestrzenny kwiatek w płaskim zielniku, przez co zachowuje tylko niektóre, najważniejsze odległości poszczególnych części kwiatka — jak nasz dendryt.

Można jednak też z dendrytu miast wyciągnąć interesujące informacje. Tak na przykład gdyby ktoś chciał połączyć wszystkie miasta wojewódzkie w najkrótszy sposób kolejami, ale bez rozgałęzień między tymi miastami, to takie połączenia właśnie dałyby dendryt figury (103).

Można mówić o dendrytach wszędzie, gdzie są przedmioty i odległości; nie muszą to być wcale punkty na płaszczyźnie. Tak więc możemy wybrać 28 stanowisk leśnych w Beskidzie Śląskim i zbadać występowanie w nich pewnych mchów, np. wątrobowców (*Hepaticae*). W Beskidzie spotyka się 31 różnych gatunków tych mchów. Botanicy mają skalę częstości występowania roślin: 0, 1, 2, 3, 4. Tak na przykład na zachodnim zboczu Smerekowca występuje *Alicularia scalaris* z częstością 1, *Cephalozia bicuspidata* z częstością 2, a *Cephalozia con-*

nivens z częstością 0. Smerekowcowi odpowiadają zatem liczby 1, 2, 0, ... Jest ich 31, bo

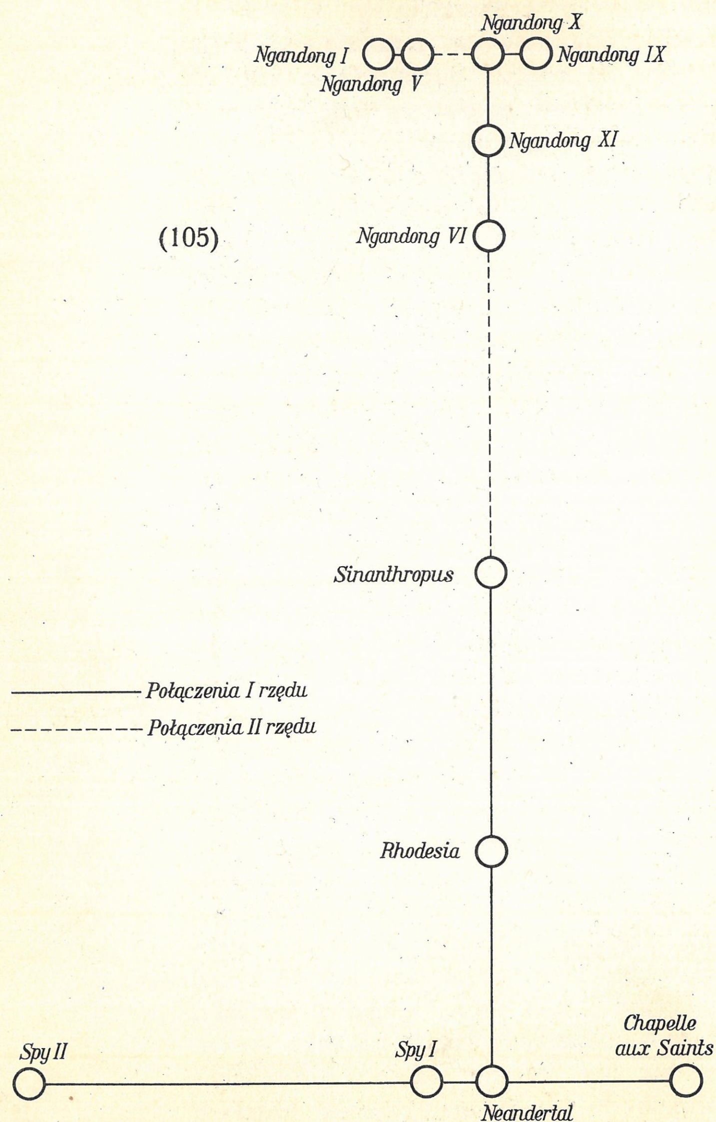


(104)

tyle jest gatunków wątrobowców. Na Stożku Wielkim te liczby są: 0, 1, 0, ... Różnice między Smerekowcem a Stożkiem są: 1, 1, 0, ... (tu wszędzie odejmuje się mniejsze od większego). Jest 31 różnic. Suma różnic jest 13. Liczbę 13 możemy uważać za odległość między Smerekowcem a Stożkiem. Nie jest to zwykła odległość, ale odległość pod względem wątrobowców: im lasy są mniej podobne pod względem flory mchów, tym ta odległość jest większa. Możemy wobec tego ułożyć tablicę wzajemnych odległości stanowisk leśnych: jest 28 stanowisk, a więc 364 odległości. Ta tablica pozwoli nam znaleźć minimalny dendryt rozpięty na 28 lasach beskidzkich. Ale taki dendryt narysowany na zwykłej mapie da nam fałszywy obraz, bo odległości na mapie są zwyczajne, a dendryt powstał z odległości „wątrobowcowych". Dlatego przerysujemy go nie troszcząc się o zwykłe odległości i umieszczając lasy zgodnie z ich odległościami botanicznymi, ale tylko tymi, których użyliśmy do sporządzenia minimalnego dendrytu. Jest ich 27 i kreski na rysunku (104) odpowiadają im swoją długością. Widzimy stanowiska leśne jako kółeczka: kółeczka pełne — to lasy świerkowe, puste — to bukowe, a cieniowane to lasy mieszane. Lasy różne co do drzew znalazły się na dendrycie osobno: niemal nigdzie nie zabłąkało się kółeczko pełne między inne kółeczka. Przez to stało się widoczne, że flora wątrobowców wiąże się z typem lasu, tak że z niej można wnosić o tym typie. Ciekawy jest fakt, że wnioskowanie z typu lasu o gatunku wątrobowców nie jest słuszne. Metoda tu opisana może służyć do klasyfikacji czaszek ludzkich

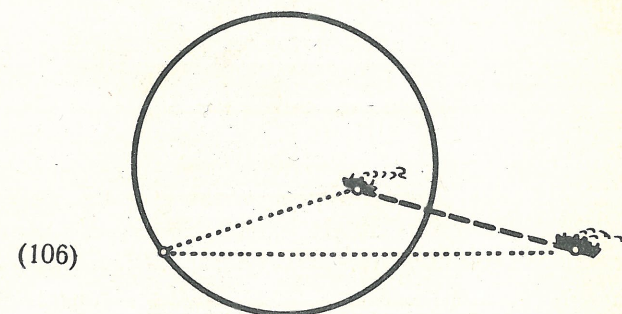
(105), języków, motorów lotniczych i wielu innych rzeczy.

(105)



Zagadnienie najkrótszej drogi powstaje przy pościgu. Jasne jest, że najlepszym sposobem pościgu na nieograniczonej płaszczyźnie (na oceanie) jest kurs wprost na przedmiot ścigany. Jednak nie jest wcale jasne dla każdego, co tu nazywamy „najlepszym sposobem". Jeżeli na przykład wiemy, że ścigany okręt nie wie, iż jest celem pościgu, i wobec tego będzie trzymał swój kurs niezależnie od naszego postępowania, to mamy lepszy sposób niż sterować wprost na niego. Znając stosunek $V : v$ szybkości, możemy znaleźć kurs, który zapewnia doścignięcie w najkrótszym możliwie czasie. Trzeba wyznaczyć wszystkie punkty, które są jednakowo odległe co do czasu od obecnych pozycji okrętów (tzn. których odległości są w stosunku $V : v$);

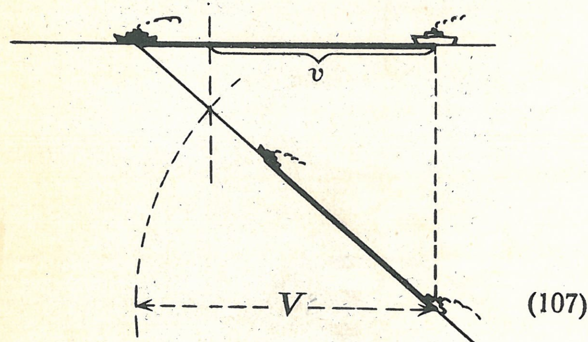
(106)



tworzą one koło (106), tak zwane koło Apolloniusza. Jeżeli to koło przecina kurs ściganego okrętu, należy sterować na punkt przecięcia; jeżeli nie przecina, to nie można złapać okrętu żadnym sposobem.

W ostatnim przypadku możemy próbować podpłynąć pod ów okręt możliwie najbliżej.

Jego szybkość v jest większa od naszej szybkości V. Przypuśćmy, że w chwili, gdyśmy go spostrzegli (107), miał kurs prostopadły do linii widzenia. Rysunek pokazuje konstrukcję, która daje nam kurs. W momencie największego zbliżenia zobaczymy oddalający się okręt prosto przed nami. (Dlaczego?). Na rysunku ta pozycja odpowiada czarnym okrętom, początkowa białym.



(107)

Mogłoby się jednak zdarzyć, że kapitan drugiego okrętu spostrzeże pościg i zmieni kurs, wtedy sposoby oparte na jego niewiedzy stracą swój walor. Aby określić najlepszy sposób, musimy wobec tego liczyć się nie z najlepszymi warunkami, lecz z najgorszymi, tak jak to było w szachach i innych grach.

Niech ścigający nazywa się Biały, ścigany niech się nazywa Czarny. Niech Biały ma szybkość V, a Czarny szybkość v i niech będzie V większe niż v. Skuteczność sposobu pościgu można mierzyć długością czasu od startu do złapania: im ten czas jest krótszy, tym sposób jest lepszy.

Na nieskończonym oceanie Czarny może się trzymać stale zdrowej zasady: cokolwiek zrobi Biały, sterować wprost od niego. Wtedy szybkość, z jaką Biały będzie się zbliżał do Czarnego (szybkość względna), będzie $V-v$ lub mniejsza, a czas potrzebny do złapania będzie $d/(V-v)$ lub dłuższy, jeżeli d oznacza początkową odległość okrętów. Ale Biały nie może zagwarantować krótszego czasu niż $d/(V-v)$, bo Czarny ma prosty sposób zapewniający mu wolność co najmniej przez ten czas. Jeżeli Biały nie będzie zawsze sterował wprost na niego, Czarny będzie cieszył się wolnością jeszcze dłużej. Z drugiej strony Biały może zagwarantować, że doścignie Czarnego w czasie $d/(V-v)$ co najpóźniej; wystarczy mu do tego trzymać kurs prosto na Czarnego i płynąć z maksymalną szybkością V. Jeżeli Czarny nie będzie się trzymał swojej zdrowej zasady lub jeżeli zredukuje szybkość poniżej v, to Biały skróci ów zagwarantowany czas.

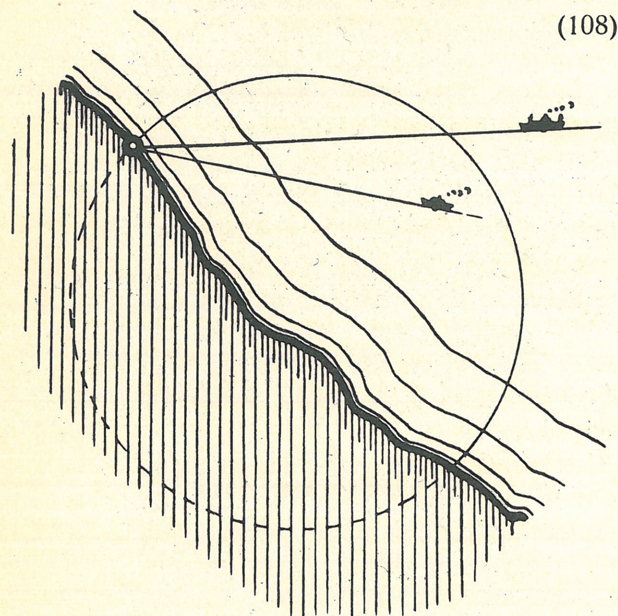
Teraz już możemy podać najlepsze sposoby dla obu. Dla Białego jest to zasada: „prosto na uciekającego", dla Czarnego „prosto od ścigającego". Biały może przy najlepszym sposobie zagwarantować czas $d/(V-v)$, Czarny zaś przy swoim najlepszym sposobie — ten sam czas. Już z tego wynika, że Biały nie może zagwarantować krótszego czasu, a Czarny dłuższego czasu niż $d/(V-v)$. Ten najlepszy rezultat jest więc ten sam dla obu stron — i dlatego pościg jest grą zamkniętą.

Dla upodobnienia pościgu do zwykłych gier oznaczmy czas liczony od startu do końca w godzinach — literą T i liczmy d w kilometrach, a V i v w kilometrach na godzinę. Przyjmijmy

regułę, że po schwytaniu Białemu liczy się $d/(V-v)-T$ punktów, a jeżeli ta liczba jest ujemna, to liczy się Czarnemu $T-d/(V-v)$ punktów. Gra tak powstała jest sprawiedliwa i — jak już wytłumaczyliśmy — zamknięta.

Pościg staje się trudniejszy, gdy okręty są blisko brzegu (108). Gdy brzeg jest linią prostą

(108)



(lub niewiele zakrzywioną), najlepsze są następujące sposoby: Koło Apolloniusza, już wyżej określone, trzeba narysować na mapie; ono porusza się wraz z okrętami.

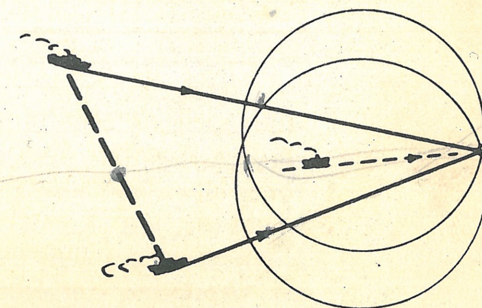
Nazwijmy punktem Apolloniusza najdalszy wodny punkt tego koła. Najlepszym sposobem dla obu statków jest kurs na ten punkt. Na pełnym morzu ta reguła nie różni się od po-

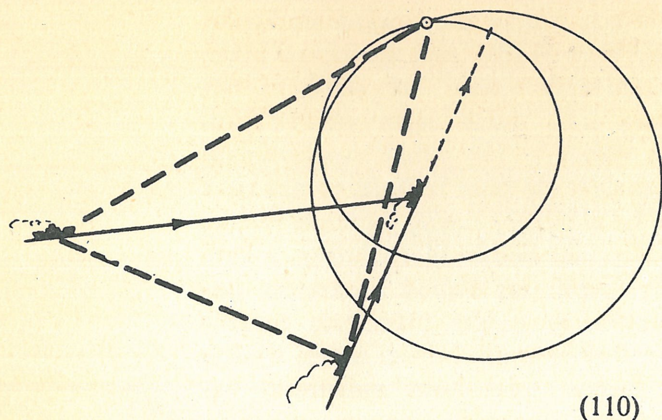
przedniej, ale gdy pościg rozpoczyna się blisko wybrzeża lub doprowadzi tam statki, to nowa reguła daje przepis różny od starej, jeżeli ujmiemy starą jako nakaz rejsu wzdłuż linii łączącej oba statki — bo punkt Apolloniusza teraz może znaleźć się poza tą linią. Jeżeli obie strony będą się trzymały nowej, ogólnie ważnej reguły, to ten punkt będzie nieruchomy, a kurs statków stały; jeżeli zaś któryś z okrętów porzuci ów sposób, to punkt przecięcia zacznie wędrować wzdłuż brzegu, a drugi okręt, wierny sposobowi, będzie miał kurs zmienny. Sąsiedztwo brzegu skraca najlepszy czas; jest wobec tego korzystne dla ścigającego. Jest ciekawe, że „sąsiedztwo" ma tu określone znaczenie: statki są w sąsiedztwie brzegu, gdy punkt Apolloniusza leży na nim.

Gdy dwa statki ścigają trzeci, trzeba narysować dwa koła Apolloniusza, po jednym dla każdego ścigacza. Stanowiska ścigaczy i dalszy punkt przecięcia kół są wierzchołkami trójkąta.

Gdy uciekający jest (109) w tym trójkącie, najlepszym sposobem dla każdego z trzech okrętów jest kurs na punkt przecięcia. Gdy

(109)





(110)

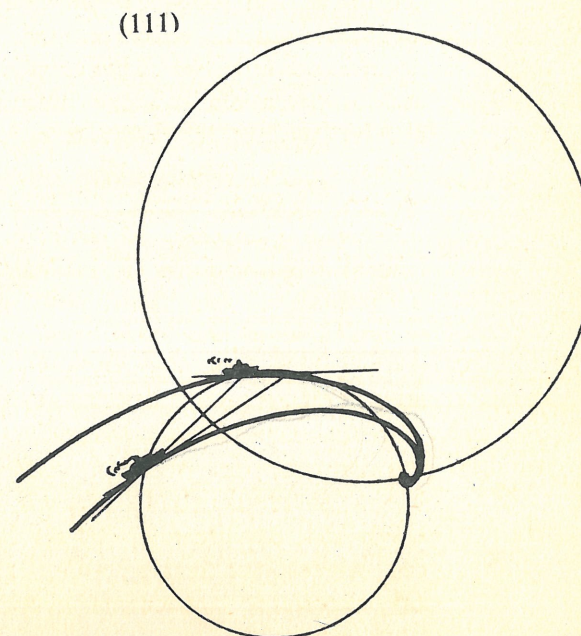
ścigany jest (110) poza trójkątem, najlepszym sposobem dla ścigaczy jest kurs wprost na niego, to znaczy stary sposób. Co do ściganego, to powinien on obliczyć ze wzoru $d/(V-v)$ czas złapania dla każdego nieprzyjaciela osobno, by stwierdzić, które z dwóch niebezpieczeństw jest aktualniejsze — i uciekać wprost od groźniejszego wroga.

Trzeba pamiętać, że trójkąt jest ruchomy i okręt ścigany może się znaleźć na jego boku. To jednak się nie stanie, jeżeli był z początku w trójkącie, a wszystkie trzy stosują się stale do reguł; wtedy wszystkie będą miały stały kurs. (Dlaczego?).

Problemat dwóch ścigaczy nie został tu rozwiązany aż do podania ścisłych dowodów. Niech czytelnik zbada, czy to, co wyżej powiedziano, jest słuszne, czy też błędne; zwłaszcza interesujące jest pytanie, czy podane wyżej określenie „otoczenia nieprzyjaciela" jest poprawne.

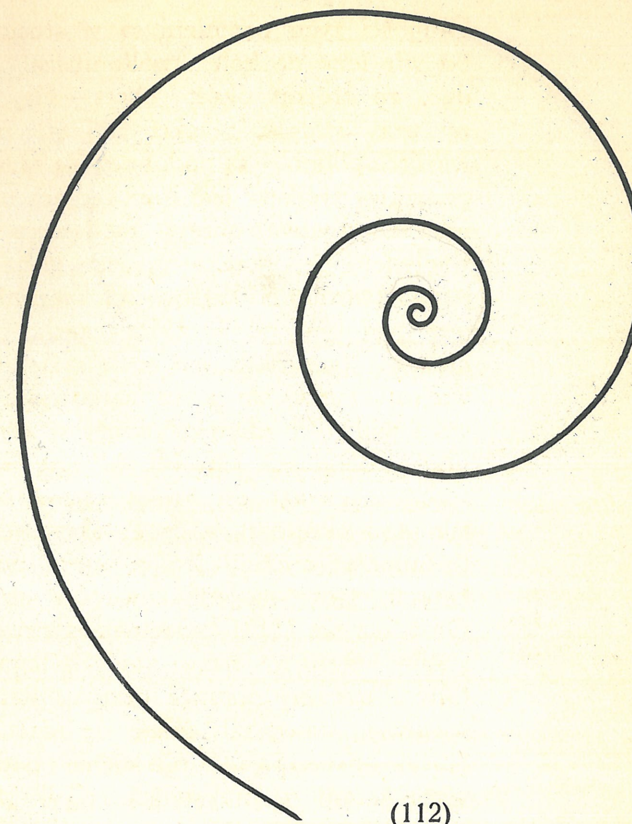
Niech jeden okręt ściga drugi zachowując stale ten sam kąt z linią łączącą obydwa i niech drugi okręt też steruje stale pod pewnym niezmiennym kątem do linii łączącej okręty. Wtedy oba będą szły po krzywych (111) zawijających się dokoła wspólnego wiru. Żeby znaleźć ten wir, który jest oczywiście punktem złapania, rysujemy koło Apolloniusza i drugie koło przechodzące przez początkowe pozycje okrętów i punkt przecięcia ich początkowych kierunków. Te dwa koła przecinają się w dwóch punktach i dalszy z nich jest szukanym wirem. Promienie łączące wir z okrętami zamykają z kursami okrętów jednakowe kąty; to wynika z tego, że wir leży na drugim kole.

(111)



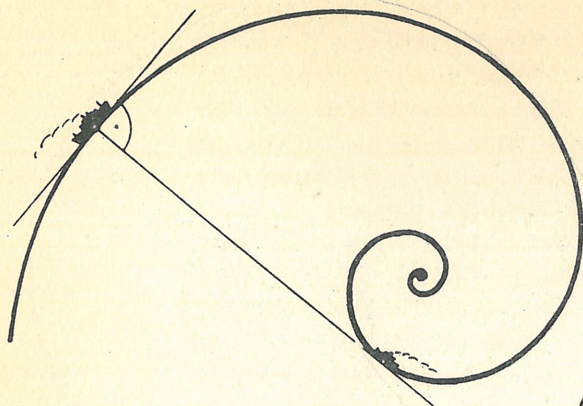
Długości tych promieni są w stosunku $V : v$, bo wir leży na kole Apolloniusza. Z tego widać, że trójkąt okręt—okręt—wir, narysowany przy starcie, i takiż trójkąt, narysowany wkrótce potem — są podobne. Za każdym razem podstawą trójkąta jest linia łącząca okręty. Ponieważ obydwa okręty zachowują swe kąty względem tej podstawy, jest jasne, że wzajemne położenie okrętów, ich kierunków i wiru jest podobne po krótkim czasie do początkowego; ponieważ V i v są stałe, więc nowy wir pokrywa się z początkowym. Z tego wiru widzi się obydwa okręty w stałej między nimi odległości kątowej (drugie koło pokazuje, że ten kąt jest równy kątowi między kierunkami okrętów), a drogi okrętów przecinają promienie wychodzące z wiru pod stałymi kątami, które są jednakowe dla obu statków. Otóż krzywa (112) przecinająca promienie pod stałym kątem ma nazwę: spirala logarytmiczna. Gdy obracamy rysunek przy ustalaniu punktu wirowego, ta spirala zdaje się róść lub maleć. Spirale przecinające promienie pod jednakowym kątem są przystające. Tak jest właśnie z torami okrętów na rysunku (111).

A teraz niech okręt pościgowy stosuje najlepszą taktykę, to jest kurs wprost na przeciwnika, który woli — sposobem korsarzy — brać kurs pod kątem prostym do kursu ścigacza. Jak już wytłumaczono, obydwaj będą płynąć po przystających spiralach logarytmicznych. Jeżeli początkowa odległość była d, a szybkość v, to czas od startu do schwytania będzie d/v, bez względu na szybkość V uciekającego, bo jego szybkość nie wpływa wcale na wzajemną odległość. Wobec tego długość spirali od po-



(112)

czątkowej pozycji ścigacza aż do wiru jest d. Ponieważ każdą chwilę możemy uważać za początkową, długość spirali ścigacza od aktualnej pozycji do wiru jest zawsze równa aktualnej odległości między okrętami. Kąt widzenia okrętów z punktu wirowego jest zawsze prosty, bo jest równy kątowi między oboma kursami, jak to powiedzieliśmy opisując rysunek (111), a ten kąt jest prosty.



(113)

Czy jest możliwe (113), żeby obydwa statki szły po tej samej drodze? Odpowiedź zależy od stosunku $V:v$. Jeżeli on wynosi 3,644, droga będzie wspólna i — co się wydaje dziwne — uciekający, którego szybkość V jest większa, płynie po szlaku ścigacza jego śladem i w końcu zderza się z nim w punkcie wirowym.

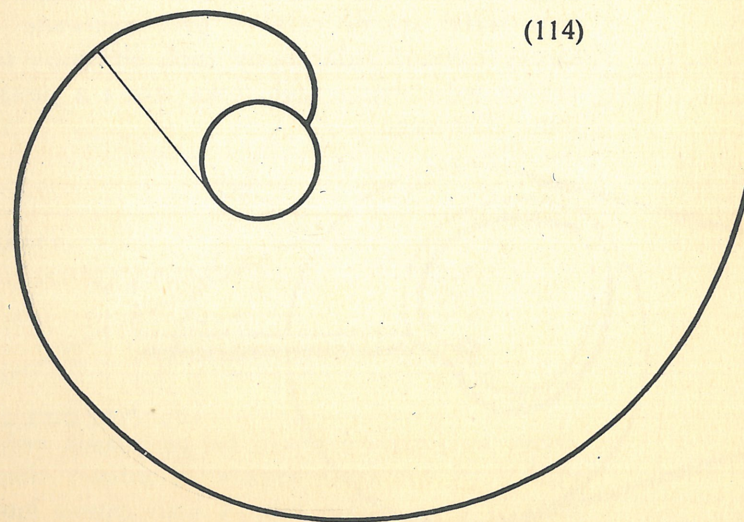
Tak otrzymana spirala ma tę osobliwą własność, że jest swoją własną ewolutą: można ją zakreślić końcem nitki nawiniętej na łuk spirali i przedłużonej. Na rysunku (113) łuk ten jest częścią spirali od okrętu do okrętu, a przedłużenie — to prosty odcinek łączący; większy statek nawija nić na spiralę i przy tym kreśli ją końcem nici. Punkt wirowy widać stale o 74°40′ na prawo od dzioba okrętu; to odnosi się do obu statków.

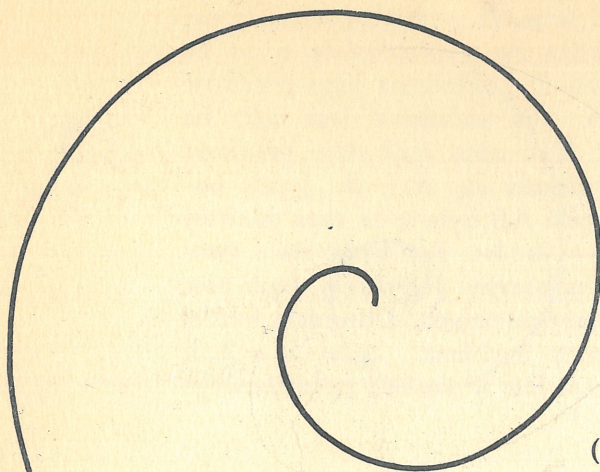
Trzy psy A, B, C stoją na wierzchołkach trójkąta równobocznego i nagle zaczynają się ścigać z tą samą szybkością v: A ściga B,

B ściga C, a C ściga A. Dzięki swej własnej szybkości A zbliża się z prędkością v do B, ale B biegnie ku C i składowa jego prędkość zbliża go do A. Ta składowa jest $v/2$, bo $\cos 60^0 = 1/2$. Tak więc $3v/2$ daje prędkość wzajemnego zbliżania się A i B. Jeżeli początkowa odległość AB była s, to czas gonitwy będzie $s:(3v/2) = 2s:3v$. Psy będą stale tworzyły trójkąt równoboczny. Jak okręty, będą biec po spiralach logarytmicznych. Długością każdej spirali jest czas × szybkość, $2s/3v \cdot v = 2s/3$, a punkt spotkania jest w środku początkowego trójkąta.

Gdy się rozwija nitkę z okrągłej szpulki, powstaje inna spirala (114). Jej ewolutą jest koło. Wyobraźmy sobie, że jakiś przedmiot uwolnił się nagle od praw ciężkości (i od oporu powietrza); wtedy uniesie się w górę i opisze taką właśnie spiralę. (Dlaczego?).

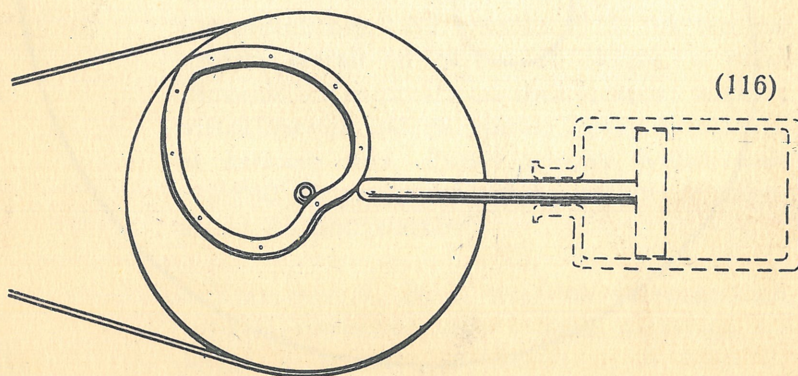
(114)





(115)

Gdy mucha lezie po promieniu jednostajnie obracającej się płyty gramofonowej, opisuje inną spiralę (115), tak zwaną spiralę Archimedesa. Tutaj odległość muchy od środka tarczy jest proporcjonalna do kąta między promieniem a ustalonym kierunkiem. Serce złożone z dwóch łuków takiej spirali (116) i przymocowane do tarczy zmienia jednostajny ruch obrotowy tarczy na jednostajny ruch tłoka tam i z powrotem. (Dlaczego?).

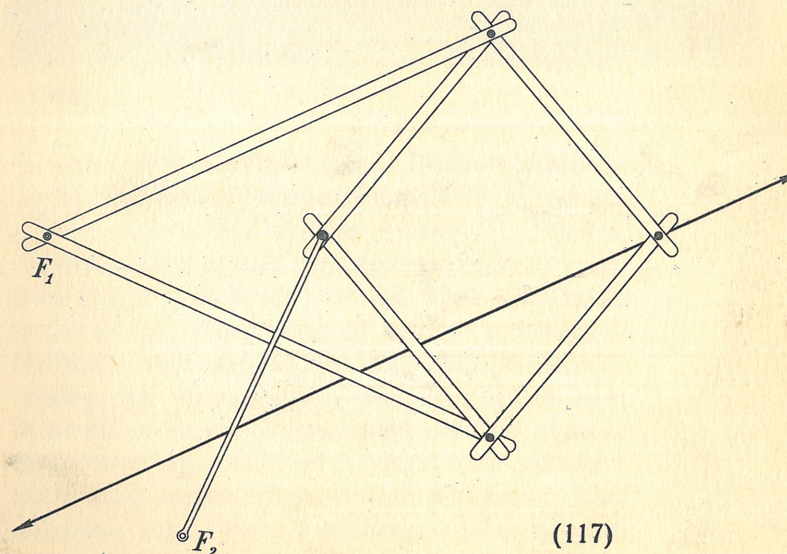


(116)

VI

LINIE PROSTE
KOŁA
SYMETRIA
ZŁUDZENIA OPTYCZNE
WIDZENIE RZECZY NIEWIDOCZNYCH

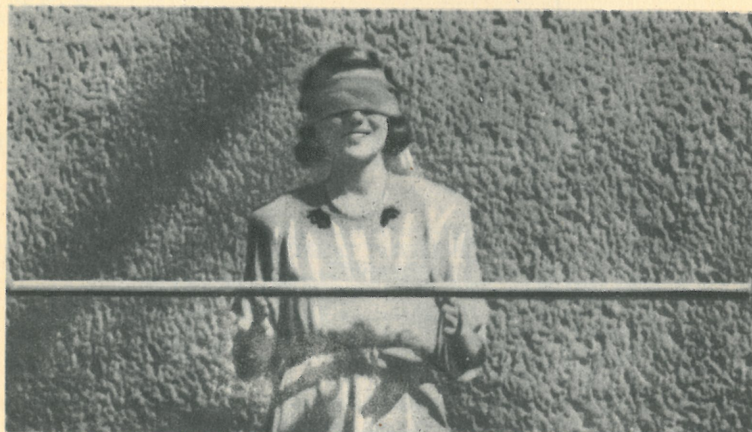
Wielobok drążkowy może pomóc w rysowaniu linii prostej bez linijki. *Inwersor* (117) składa się z sześciu drążków, z których cztery krótsze są równe i tworzą ruchomy romb,



(117)

a dwa dłuższe są też równe i wiążą dwa wierzchołki rombu ze stałym punktem F_1. Gdy drugi punkt stały F_2 jest połączony z trzecim

wierzchołkiem rombu siódmym drążkiem o długości F_1F_2, a wszystkie połączenia są przegubowe, to wolny wierzchołek kreśli przy deformowaniu rombu prostą.



(118)

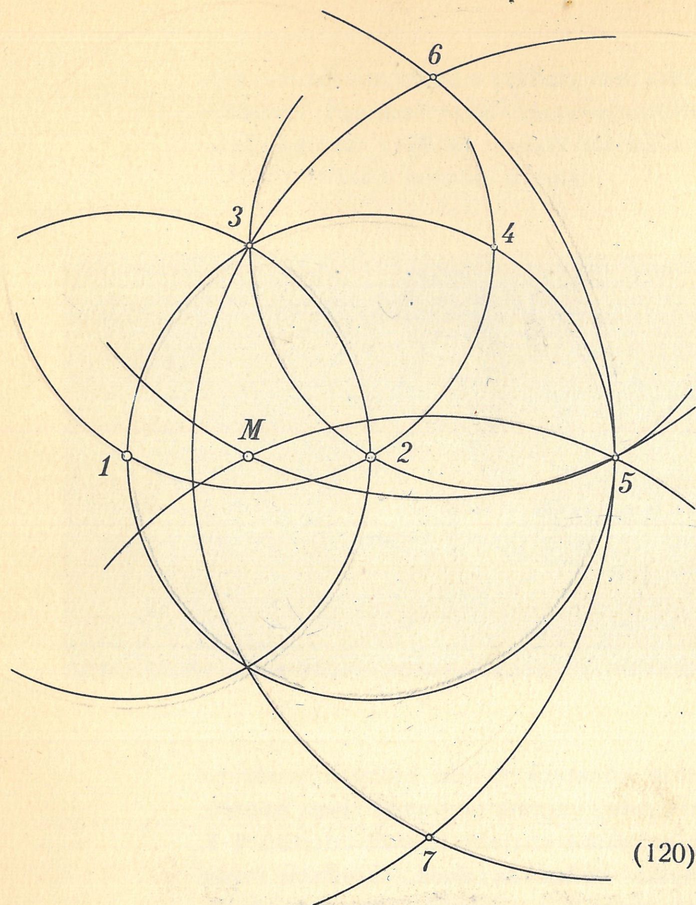
Chcąc znaleźć środek ciężkości laski umieszczamy ją (118) poziomo na krawędziach dłoni, a potem zbliżamy ręce; w końcu dłonie zejdą się w środku ciężkości. Laska nie traci równowagi, bo gdy środek ciężkości, który jest z początku między dłońmi, zbliża się do jednej z nich, nacisk laski na bliższą dłoń staje się wielokrotnie większy niż nacisk na dalszą: iloczyn nacisku przez współczynnik tarcia musi w końcu przewyższyć takiż iloczyn w punkcie nad dalszą dłonią, a wtedy ustaje ruch laski względem bliższej dłoni i zaczyna się względny ruch drugiej dłoni. Ta gra idzie na przemian, aż dłonie się zejdą; ponieważ środek ciężkości jest zawsze między nimi, więc jest w końcu tam, gdzie się spotkają.

Gdy laska jest gładka, można tę sztukę wykonać automatycznie, bez żadnego świadomego wysiłku, a nawet (119) z zamkniętymi oczyma.



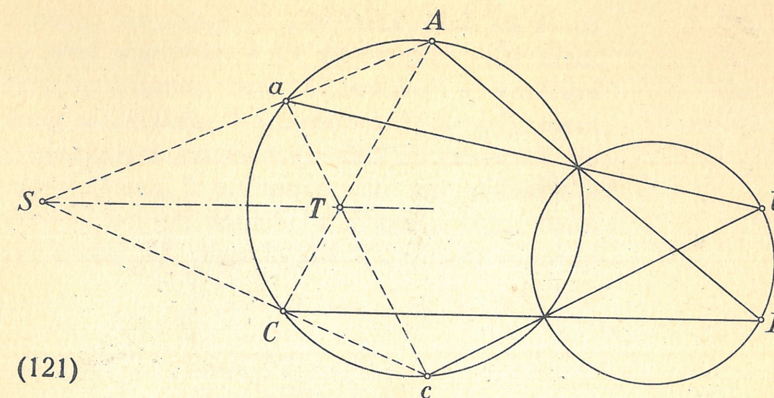
(119)

Wszystkie konstrukcje, do których potrzeba cyrkla i liniału, można wykonać bez liniału. Chcąc na przykład znaleźć środek odcinka *1-2*, którego tylko końce są dane, kreślimy dwa koła promieniem *1-2* z punktu *1* i z punktu *2*; znajdujemy ich przecięcie *3*; z tego punktu kreślimy tym samym promieniem koło, które daje punkt *4*; z punktu *4* kreślimy (120) tym samym promieniem koło (przez *3* i *2*), które przecina drugie koło w punkcie *5*; z punktu *5* promieniem *5-3* i z punktu *1* promieniem *1-5* kreślimy dwa dalsze koła, które przecinają się w punktach *6* i *7*, wreszcie z tych punktów przez *5* kreślimy dwa koła, których przecięcie *M* jest szukanym środkiem. Rysunek ma osiem kół. (Czy może być mniej?).



(120)

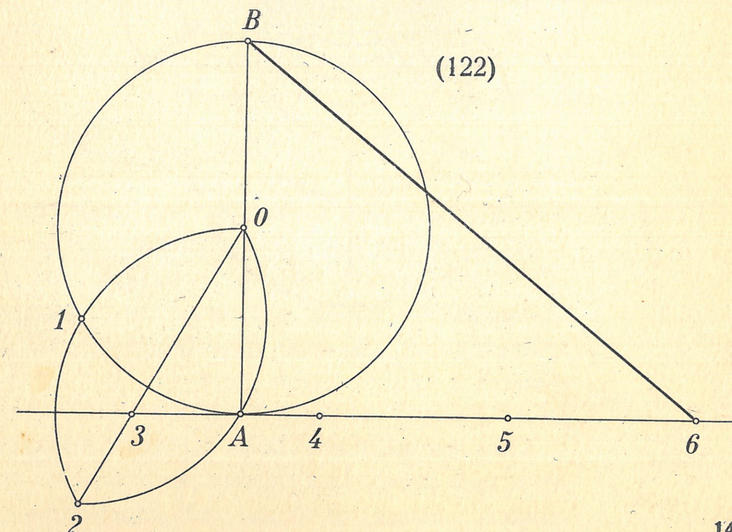
Mając dwa przecinające się koła (121) możemy znaleźć ich środki samym tylko linealem. Wybieramy punkt *a* na jednym kole; przez *a* i przez przecięcie kół kreślimy prostą i znajdujemy *b*; wracamy z *b* przez drugie przecięcie do *c*; potem zaczynamy od innego punktu *A* i znajdujemy *B* i *C*. Łączymy kreskowaną linią *a* z *c* i *A* z *C*, a także *A* z *a* i *C* z *c*; otrzymujemy dwa punkty, które łączymy prostą (punktowaną i kreskowaną). Ta prosta przechodzi przez środek koła *aAcC*. Powtarzając



(121)

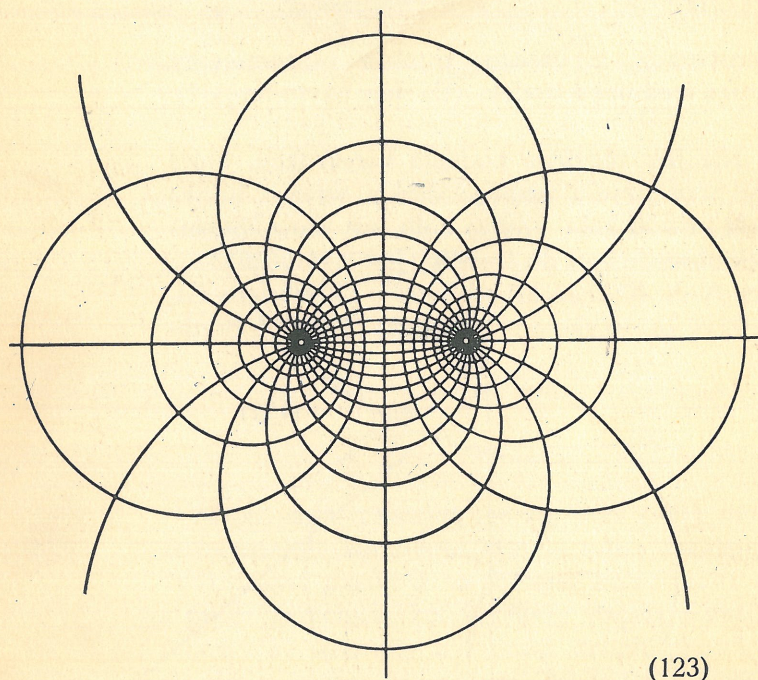
konstrukcję z innego punktu otrzymujemy drugą średnicę i środek. (Ile razy użyto linijki?).

Nie jest możliwe podanie konstrukcji, która by przy użyciu samego cyrkla wraz z linijką dała obwód koła, gdy to koło jest dane. Stosunek obwodu koła do średnicy jest 3,141592653... Ks. A. A. Kochański, bibliotekarz króla Jana III, odkrył konstrukcję przybliżoną (122). Z punk-



(122)

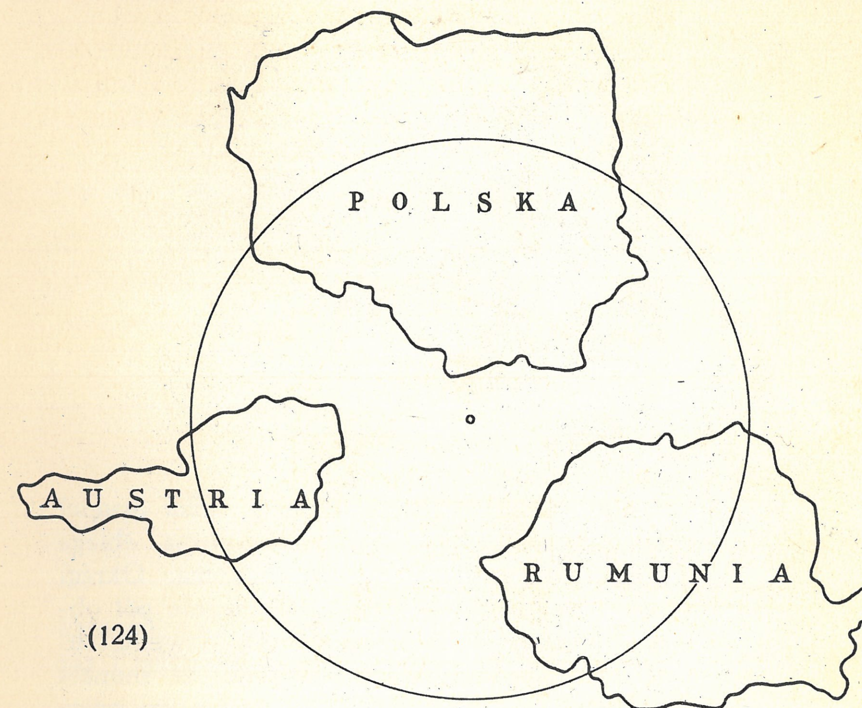
tu A na kole kreśli się tym samym promieniem koło; otrzymuje się *1*. Drugie koło, zakreślone z punktu *1* tym samym promieniem, daje *2*. Połączenie *2-0* przecina w punkcie *3* styczną do koła wyznaczoną w punkcie A. Odkładając na niej z punktu *3* potrójny promień uzyskujemy *6*, a odcinek $B6$ jest w przybliżeniu równy połowie okręgu. (Z jakim błędem?).



(123)

Gdy narysujemy (123) wszystkie koła przechodzące przez dwa punkty, to będziemy mogli znaleźć drugą gromadę kół, przecinających

pierwsze koła pod kątami prostymi. Ta druga gromada składa się z kół Apolloniusza *

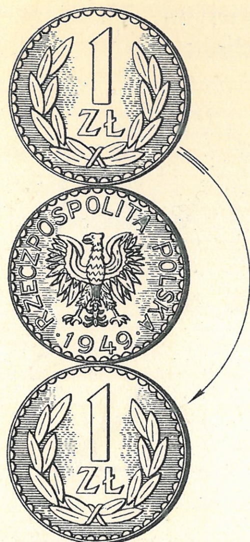


(124)

Gdy mamy trzy obszary o dowolnych kształtach i położeniach, to zawsze można przepołowić je wszystkie jednym kołem (124). Do przepołowienia wystarczy prosta. Odpowiednią własność przestrzeni nazwano „twierdzeniem o kanapkach": zawsze można bułkę z masłem i szynką tak przekroić płaskim cięciem, żeby przepołowić bułkę, masło i szynkę.

---

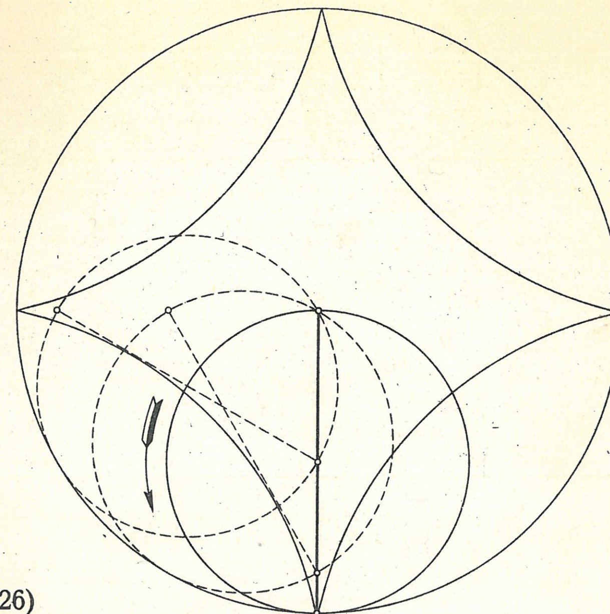
* Porównaj (106).



(125)

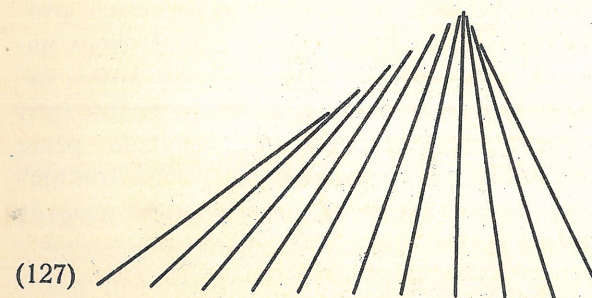
Gdy toczymy jedną monetę koło drugiej takiej samej (125), punkt zetknięcia obiega obie monety całkowicie, stałą i ruchomą. Okręgi są równe, więc gdy punkt przebiegnie pół obwodu stałej, to przebiegnie pół obwodu ruchomej. Jednak próba wskazuje, że moneta ruchoma potem znowu leży głową do góry. (Dlaczego?).

Kopernik rozpoznał, że gdy koło toczy się wewnątrz drugiego koła o dwa razy większym obwodzie, to każdy punkt na okręgu mniejszego koła (126) biegnie po prostej. Wyobraźmy sobie, że do mniejszego koła jest przymocowana zapałka jako cięciwa, i obserwujmy ruch tej zapałki od chwili, gdy jej główka dotyka dużego koła, aż do chwili, gdy drugi koniec osiągnie środek dużego koła. Zapałka zamiotła przez ten czas pole trójkąta prosto-



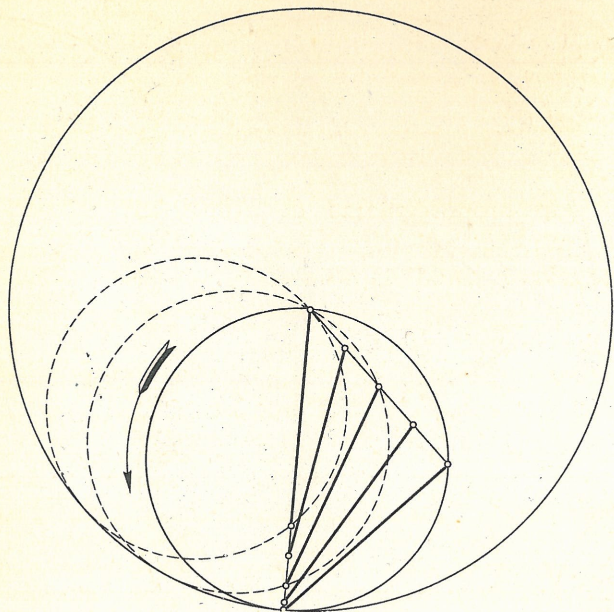
(126)

kątnego, a każdy punkt tego pola był dotknięty raz i tylko raz przez zapałkę. W ten sposób



(127)

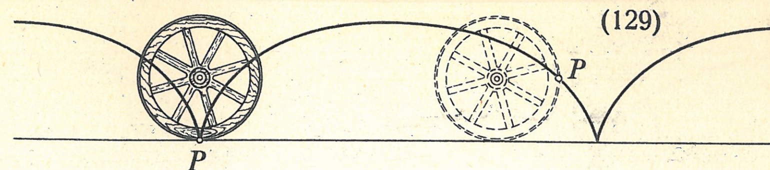
każdy trójkąt da się zamieść zapałką (127) przy odpowiednim ruchu.



(128)

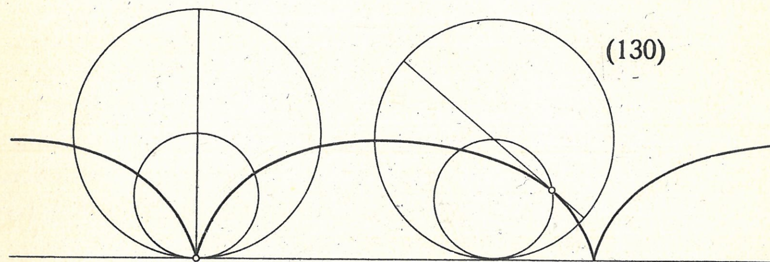
Gdy poruszamy zapałkę tak, żeby jej oba końce biegły po prostych przecinających się, to jej ruch jest identyczny z ruchem cięciwy mniejszego koła w systemie kopernikańskim dwóch kół. Trzeba tylko wziąć przecięcie prostych za środek dużego koła, a małe koło narysować przez środek dużego i oba końce zapałki. Będzie ono podczas całego ruchu (gdy je zwiążemy z zapałką) przechodziło przez trzy punkty. Gdy zapałka jest równa średnicy małego koła (128), to zamiecie wnętrze gwiazdy (asteroidy).

Gdy koło toczy się po prostej (129), punkt (gwóźdź) na jego obwodzie opisuje cykloidę. W każdej chwili punkt okręgu biegnie ku najwyższemu punktowi lub ucieka od niego,



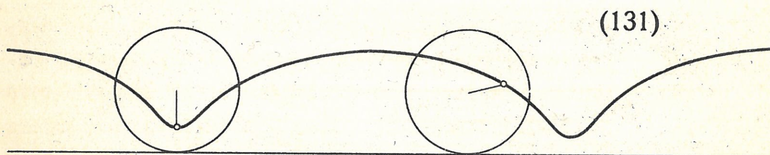
(129)

a szybkość jest proporcjonalna do odległości ruchomego punktu od najniższego punktu. (Jaką ma szybkość punkt najniższy?).



(130)

Niech drugie koło toczy się z tą samą szybkością, ale będzie dwa razy większe, i niech na nim będzie zaznaczona średnica, która z początku była pionowa: będzie ona stale ślizgać się po cykloidzie (130).

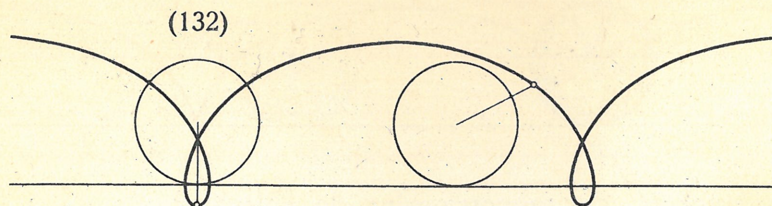


(131)

Umocujmy punkt bliżej środka (131), a otrzymamy krzywą bez ostrzy, a jeżeli umocujemy go na przedłużeniu promienia (132), powstanie krzywa z pętlami.

Długość cykloidy jest równa obwodowi kwadratu opisanego na kole toczącym się.

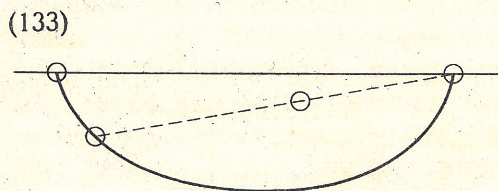
(132)



Odwróćmy rysunek (129). Możemy teraz uważać *P* za ciężką kulkę toczącą się po cykloidalnej rynnie; jej spadek pod wpływem siły ciężkości będzie taki, jak gdyby koło tworzące cykloidę toczyło się ruchem jednostajnym, a kulka była związana z okręgiem koła.

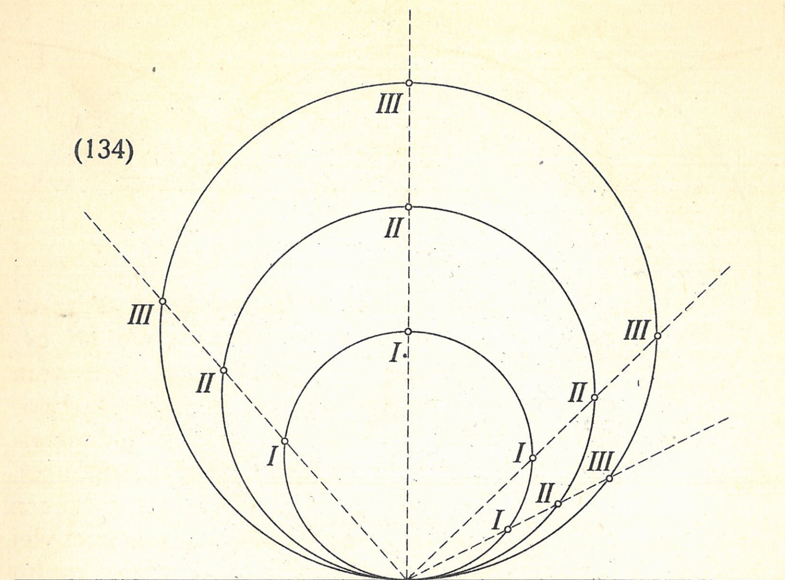
Kulka tocząca się po cykloidalnej rynience (133) wyprzedza kulkę spadającą po pochyłej płaszczyźnie, nawet jeżeli musi część ruchu odbyć w górę. Nasz szkic pokazuje płaszczyznę pochyłą (linia kreskowana), a także położenie kulki na niej w chwili, gdy druga, biegnąca wzdłuż cykloidy, przecina płaszczyznę.

(133)



Takie rachunki wielce ułatwia fakt zauważony przez Kanta, że punkty spadające wzdłuż pochyłych płaszczyzn (134), a startujące równocześnie z tego samego punktu, w każdej chwili ustawione są w szyku kołowym. Kula spadająca wzdłuż rynienki cykloidalnej osiąga cel prędzej niż wzdłuż dowolnej innej rynny.

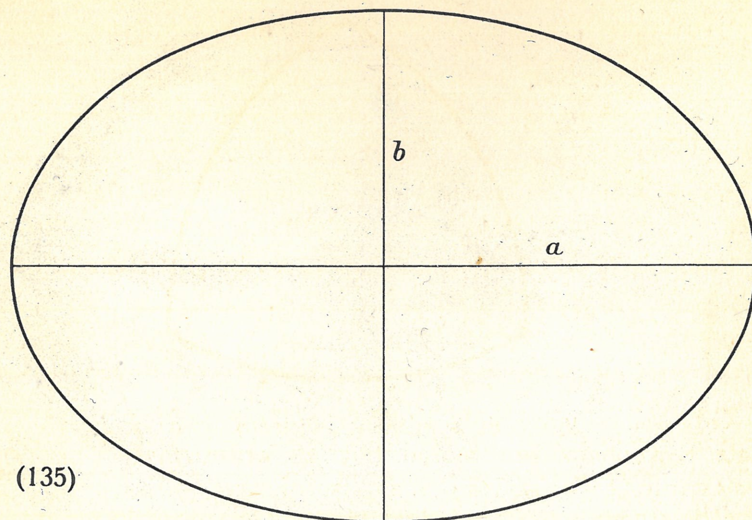
(134)



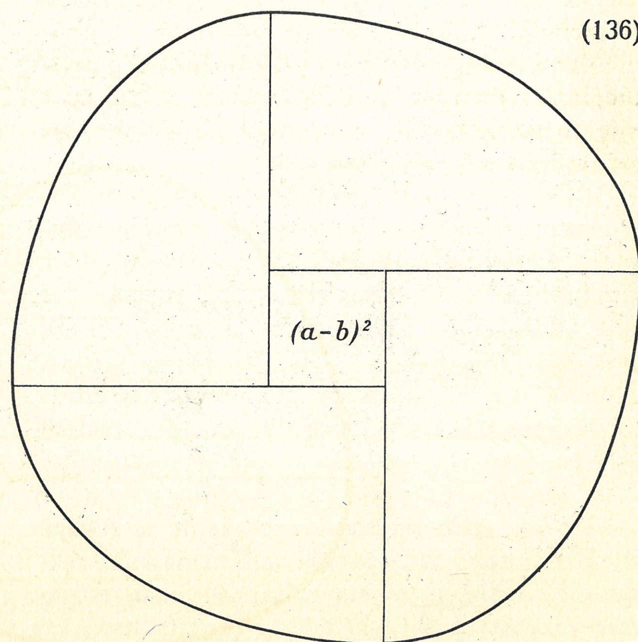
Koło ma największe pole spośród wszystkich linij o tym samym obwodzie. Stąd pole zamknięte krzywą o długości L nigdy nie przewyższa $L^2/(4\pi)$. (Dlaczego?).

Pole zamknięte krzywą różną od koła można zwiększyć wyginając krzywą bez zmiany długości. Łatwo to zobaczyć, gdy krzywa ma dwie prostopadłe osie symetrii (135): rozcina się pole wzdłuż osi i składa ćwiartki znowu (136), odwróciwszy dwie z nich na drugą stronę. Długość się nie zmieniła, ale powstał w środku kwadracik, który właśnie jest przyrostem pola.

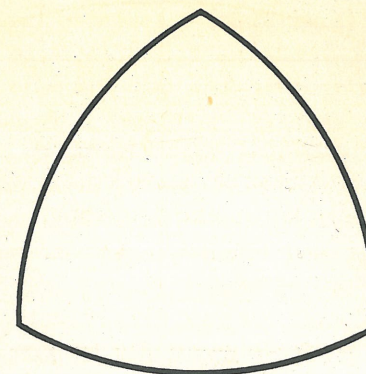
Koło ma stałą szerokość: możemy je toczyć po stole bez podnoszenia ani zniżania ręki toczącej. Ale tę samą własność mają różne inne krzywe:



(135)



(136)

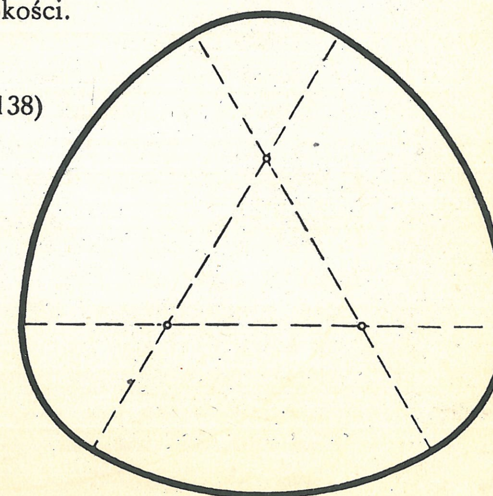


(137)

Gdy narysujemy koła z wierzchołków trójkąta równobocznego biorąc bok za promień, powstanie (137) krzywa o stałej szerokości.

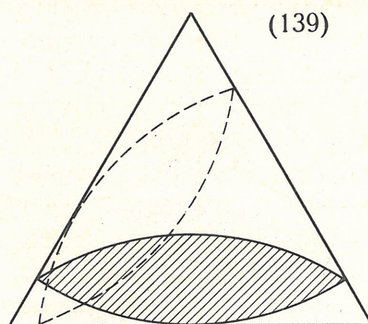
Gdy chcemy mieć gładką krzywą, musimy tylko przedłużyć jednakowo boki trójkąta (138) i narysować sześć łuków kołowych biorąc znowu wierzchołki za środki, ale na przemian — promieniami równymi bokom przedłużonym i promieniami równymi przedłużeniom. Gdy taką linię toczymy, to jej najwyższy punkt zawsze jest na tej samej wysokości.

(138)

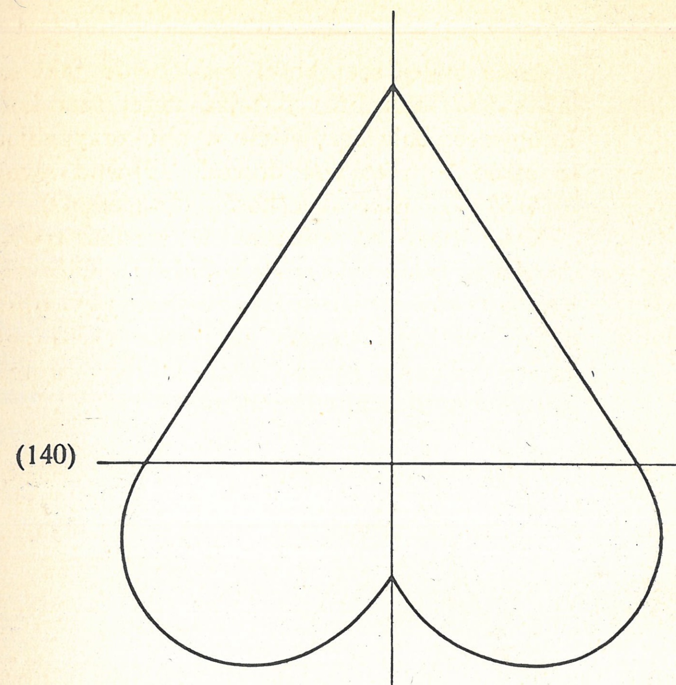


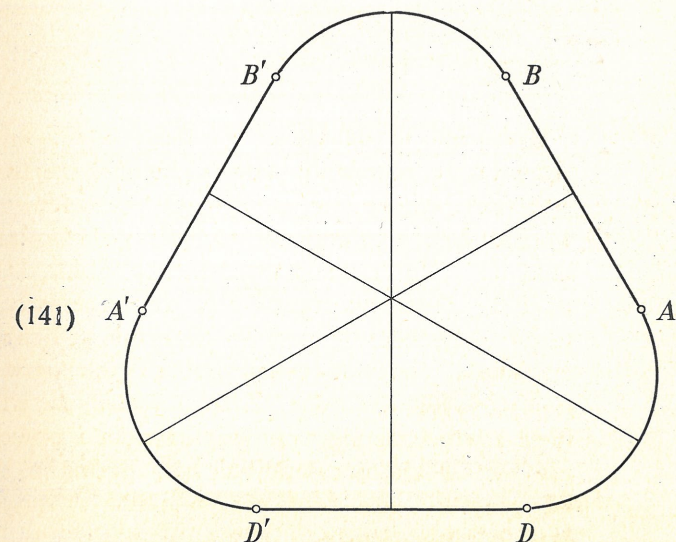
Linia stałej szerokości ma obwód taki sam jak każda inna linia o tejże stałej szerokości. Longimetr daje oczywiście w obu przypadkach to samo — i to jest dowód. Obwód wynosi 3,14159 .... razy szerokość. (Dlaczego?).

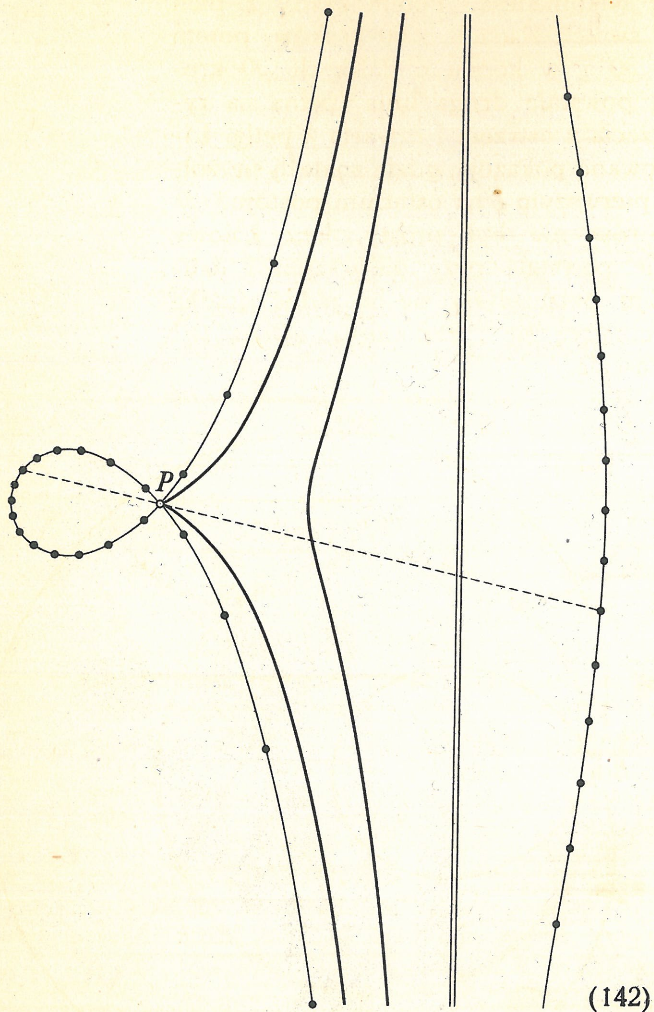
Koło może się obracać w środku trójkąta dotykając stale wszystkich boków. Gdy trójkąt jest równoboczny, to najmniejszy obszar o tej własności tworzy soczewka (139) ograniczona dwoma łukami koła, którego promień jest równy wysokości trójkąta.


(139)

Koło ma tę własność, że drąg o przekroju kołowym, z materiału jednorodnego i lżejszego od wody, może się utrzymać bez ruchu na wodzie bez względu na to, jak go obrócimy koło osi. Tu narysowane kontury (140), (141) mają tę samą własność, gdy dobierzemy materiał o gęstości 1/2; są to linie tak obliczone, że każda cięciwa, która połowi ich obwód, połowi także ich pole. Z tego widać, że własność równoczesnego połowienia pola i obwodu nie jest wcale przywilejem kół. Jedna z linij na rysunku ma trzy osi symetrii i zawiera trzy odcinki proste.

(140)


(141)




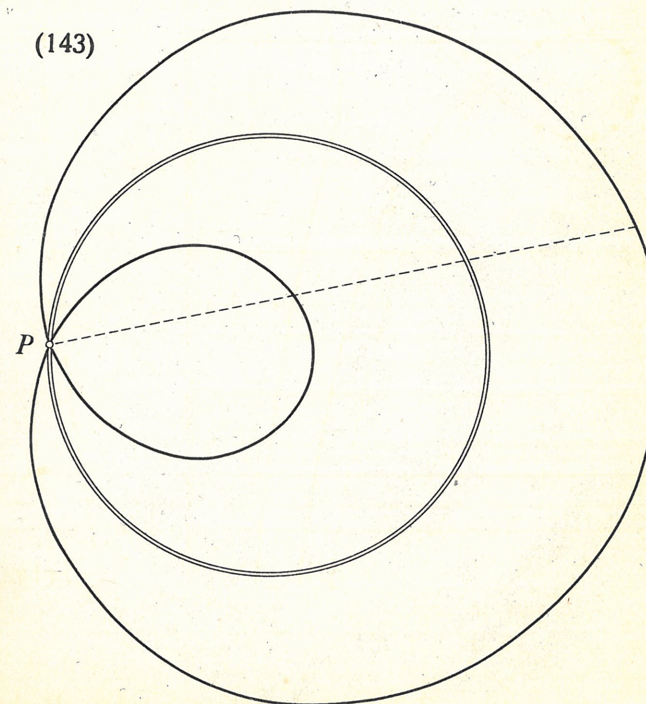
(142)

Żołnierze wyszli z punktu *P*, każdy w innym kierunku i (142) zatrzymali się 30 kroków za rowem. Utworzyli przez to wygiętą linię,

konchoidę Nikomedesa. Potem każdy z nich wrócił po swoich śladach o 60 kroków, potem jeszcze o 30 i w końcu o dalszych 30 kroków. Tak powstała druga linia (pełna na rysunku), trzecia z ostrzem i czwarta z pętlą. Linie kropkowane pokazują, gdzie znaleźli się żołnierze na pierwszym i na ostatnim postoju.

Gdyby rów nie był prosty, lecz kołowy (143), linie powstałe przy pierwszym i drugim postoju połączyłyby się w jedną gładką linię przecinającą się i zamkniętą, zwaną ślimakiem Pascala.

(143)

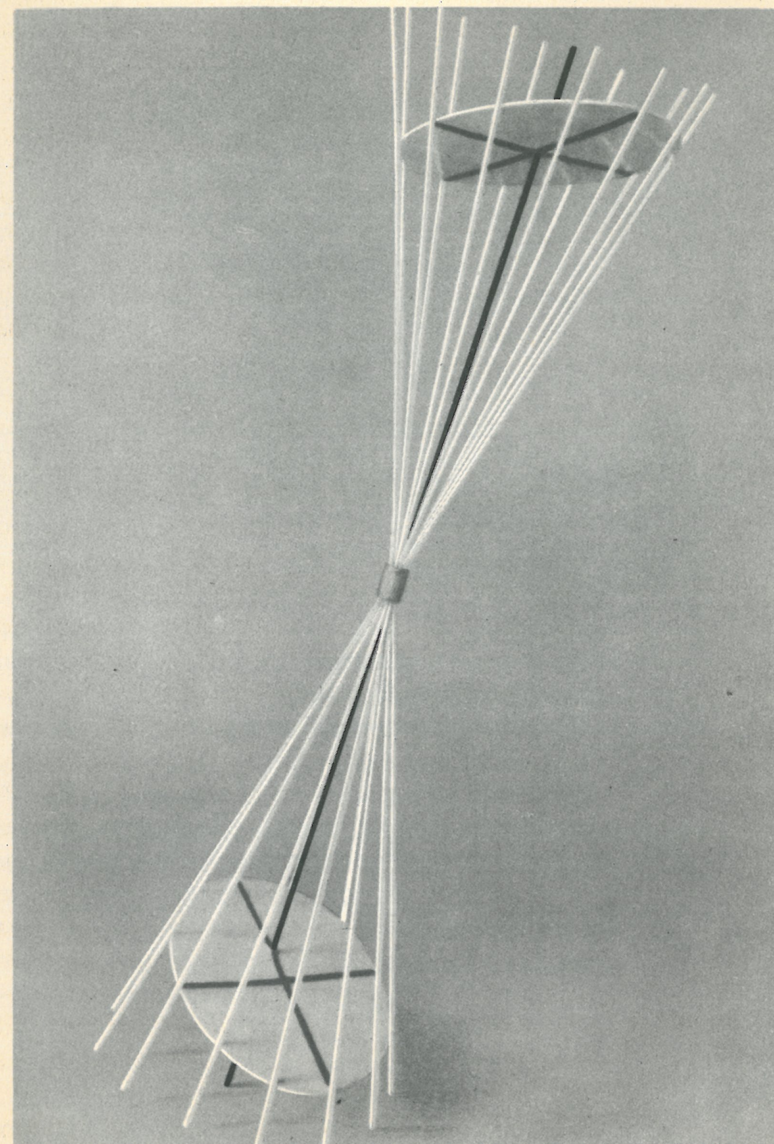


Ze wszystkich krzywych koło jest najsymetryczniejszą: ma nieskończenie wiele osi symetrii. Aby mieć symetryczny obraz jakiegoś przedmiotu, można użyć zwierciadła. Wtedy zwierciadło jest płaszczyzną symetrii. Weźmy za ów przedmiot tarczę kołową (144) pochyloną ku zwierciadłu i narysujmy na niej średnicę równoległą do zwierciadła i drugą, prostopadłą do pierwszej. Po drugiej stronie lustra zobaczymy odbicie krążka i średnic. Łącząc na krzyż końce średnic z ich obrazami otrzymamy punkt na lustrze. Ten punkt można uważać za wierzchołek stożka, którego podstawą jest tarcza rzeczywista. Odbicie tego stożka daje drugi stożek, który widzimy pozornie za lustrem. Ale obydwa stożki, rzeczywisty i pozorny, można uważać za jeden, bo tworzące rzeczywistego stożka, przedłużone, dają tworzące stożka pozornego. Tak powstaje model widoczny na fotografii; lustro zostało usunięte.

Ale prosta łącząca środek tarczy z wierzchołkiem stożka nie przechodzi przez środek drugiej tarczy, jak wyraźnie dowodzi czarny drut modelu. Można sprawdzić to przecinając model płaszczyzną przechodzącą przez obie czarne średnice nachylone do lustra. Na płaszczyźnie pojawią się dwie średnice jako odcinki symetrycznie położone i dwa białe druty łączące na krzyż końce tych odcinków, a także drut przechodzący przez środek jednego odcinka; jest to oczywisty fakt geometrii płaskiej, że ów czarny drut nie trafi w środek drugiego odcinka.

Z tego wynika niemożliwość konstrukcji środka koła przy pomocy samej linijki. Bo

(144)



taka konstrukcja narysowana na płaszczyźnie jednej tarczy składałaby się z układu prostych, z których dwie przecinałyby się w środku tarczy. Rzut tej konstrukcji przez środek stożka na drugą tarczę dawałby konstrukcję wykonaną dokładnie według przepisu pierwszej konstrukcji, bo koło brzegowe tarczy przeszło w koło brzegowe drugiej, proste na jednej — w proste na drugiej, a punkty przecięcia — w punkty przecięcia. Wobec tego środek pierwszej tarczy, który jest jednym z tych przecięć, powinien przejść w środek drugiej tarczy, lecz — jak wiemy — nie przejdzie. Ten dowód niemożliwości jest bardzo charakterystyczny jako przykład metody matematycznej.

Aby mieć płaski obraz trójwymiarowego przedmiotu, uciekamy się do perspektywy geometrycznej. Kamera fotograficzna daje ją automatycznie, ale mistrzowie malarstwa używali tych samych środków (145) chcąc wywołać wrażenie głębi przestrzennej.

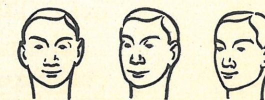
Poziome równoległe zawsze się przecinają na linii horyzontu obrazu. Jeżeli są prostopadłe do tła, ich zbieg jest ,,punktem głównym" — zbieg czerwonych linii na rycinie (145). Trzeba umieścić oko na linii prostopadłej do obrazu i wystawionej z punktu głównego, by mieć wrażenie wzrokowe odpowiadające trójwymiarowej rzeczywistości. Gdy oko znajdzie się poza tą linią, zobaczymy inny, zdeformowany model. (Dlaczego?).

Złudzenie optyczne portretu, który wodzi oczyma za widzem przechodzącym koło niego, jest nietrudno wytłumaczyć. Gdyby (146) to był żywy człowiek stojący nieruchomo przy



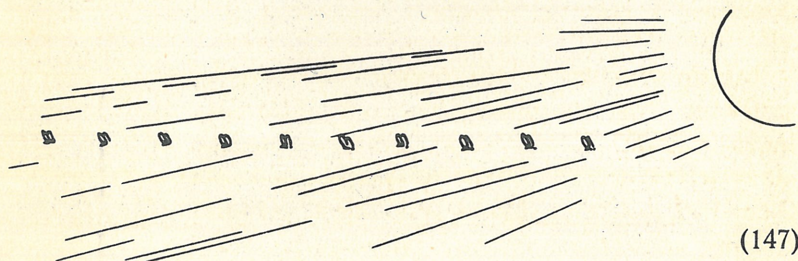
(145)

ścianie, a nie obraz, to przechodząc koło niego mielibyśmy coraz to inny widok: najpierw znika jedno ucho za głową, potem jedno oko zaczyna się kryć za nosem itd. Gdyby jednak ów człowiek obracał głowę w miarę, jak idziemy, zwracając stale twarz ku nam, widzielibyśmy stale oboje uszu, oboje oczu itd. Ponieważ przechodząc koło portretu widzimy stale oboje oczu i oboje uszu z każdego stanowiska, więc portret robi wrażenie osoby zwracającej się twarzą ku nam.



(146)

Pewnego popołudnia letniego autor widział rój muszek tańczących tak jak komary w jednym miejscu, a potem przerzucających się nagle o kilka metrów dalej, by tam tańczyć parami i po jakiejś minucie znowu wrócić na dawne miejsce — i tak powtarzać ową zbiorową zabawę. Trwało to dosyć długo, dzięki czemu autor mógł oszacować z grubsza szybkość przerzutów; była około 60 km na godzinę.



(147)

Patrząc uważnie widziało się (147) jasne punkty podczas zmiany miejsca. Składały się one na punktowane linie w powietrzu, a punkty były w odstępach mniej więcej jednocentymetrowych. Był to oczywiście efekt słońca świecącego z boku na owady: stawały się widoczne w momencie podnoszenia skrzydełek. Każdy różaniec błysków należał do jednej muszki, a widziało się ich wiele na jej torze dzięki temu, że obrazy trwają na siatkówce przez pewien ułamek sekundy.

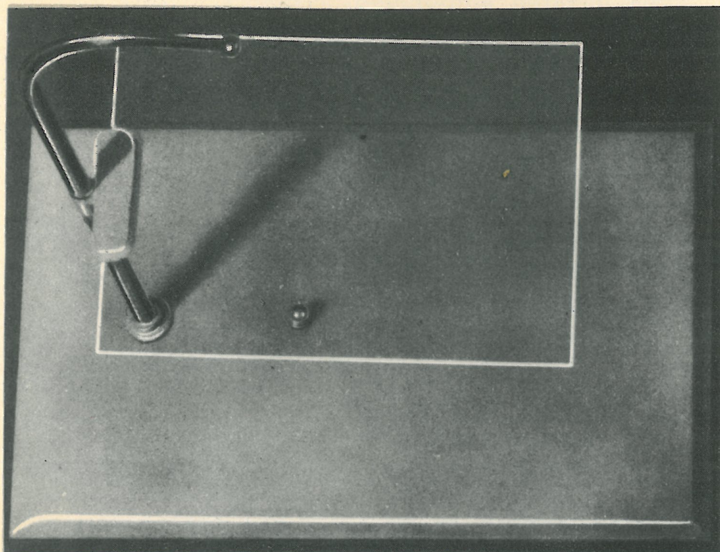
60 km/godz — to 6 000 000 centymetrów na 3600 sekund, czyli około 1667 centymetrów na sekundę, a więc 1667 uderzeń skrzydełkami na sekundę. Przyjąwszy nawet, że błąd wynikły z grubego oszacowania szybkości lotu i odstępów iskierek wymaga obniżenia liczby o 40 %

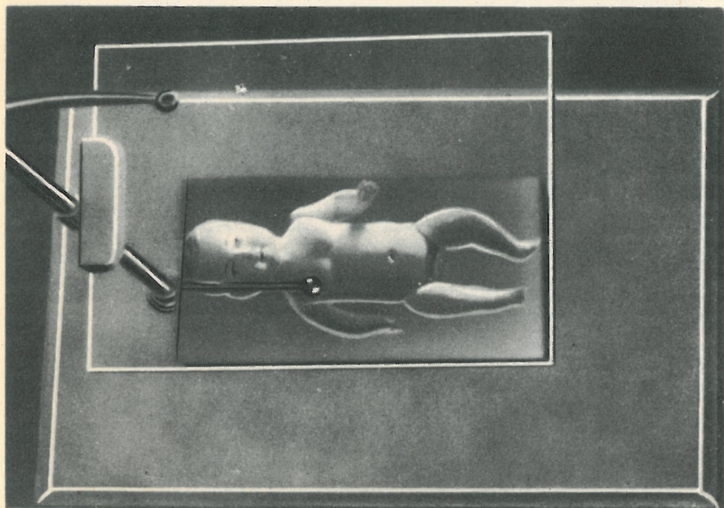
możemy streścić obserwację jako co najmniej tysiąc uderzeń na sekundę. Jest interesujące, że wynik ten można było uzyskać bez instrumentów.

Jedno uderzenie skrzydełkami — to dla muszki to samo, co krok dla człowieka. Człowiek robi dwa kroki na sekundę, muszka 1600 uderzeń, to znaczy, że jej życie biegnie 800 razy prędzej: dwie minuty dla niej jest tym, czym dla nas doba, tak że cykl, który opisaliśmy, można porównać z zabawą poranną i wieczorną.

Zasadę symetrii można zastosować do takiej zabawki: Na drewnianej deseczce (148) leży kulka stalowa. Krótka rurka wbita w deseczkę służy jej za gniazdko, tak że kulka jest około 2 cm nad deseczką. Do deseczki jest przymocowany uchwyt zakończony podobną błyszczącą kuleczką, która jest około 30 cm nad dolną kulką. Ten sam uchwyt niesie szybkę szklaną, a odległości są tak dobrane, że szybka jest płaszczyzną symetrii dla kulek. Patrząc z góry widzimy za szybą dolną kulkę, bo szyba jest przezroczysta, a także i górną, bo szyba działa jak zwierciadło. Mimo to widzimy tylko jedną kulkę za szybą, bo kulki pokrywają się dzięki symetrycznemu położeniu.

Połóżmy teraz glinianą lalkę (149) na deseczce tak, by pokryć dolną kulkę; gdy znowu spojrzymy z góry, zobaczymy (149) kulkę na swoim miejscu, bo odbicie jest dalej widoczne. Ten widok jest jednak pod względem optycznym równoważny z widokiem niższej kulki. Możemy tego dowieść namacalnie sięgając palcami lub szczypcami poprzez glinę i chwytając kulkę bez wahania, tak jak gdyby glina była przezroczysta.

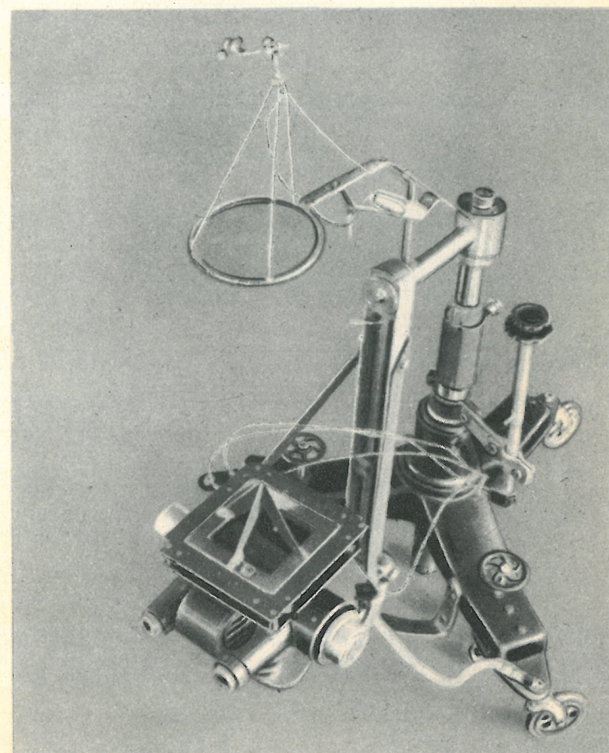

(148)


(149)

Ten pomysł może mieć praktyczne zastosowanie: można go użyć do lokalizacji ciał obcych ukrytych w ciele ludzkim. Tutaj jednak

musimy się posłużyć promieniami Roentgena (150). Początkowo nie wiemy, gdzie znajduje się przedmiot w ciele pacjenta (np. kawałek igły), i prześwietlenie promieniami lampy Roentgena, umieszczonej pod stołem operacyjnym, daje tylko rzut igły na ekran, który jest nad pacjentem. Lampa wisi na wahadle i gdy ją wychylimy (151), ów rzut się przesunie. Możemy jednak w tej nowej pozycji uzyskać powrót obrazu do starej, gdy całą konstrukcję podniesiemy lub obniżymy (do tego służy korba i kółko zębate). Szybka i mała żaróweczka znajdujące się nad pacjentem są sztyw-

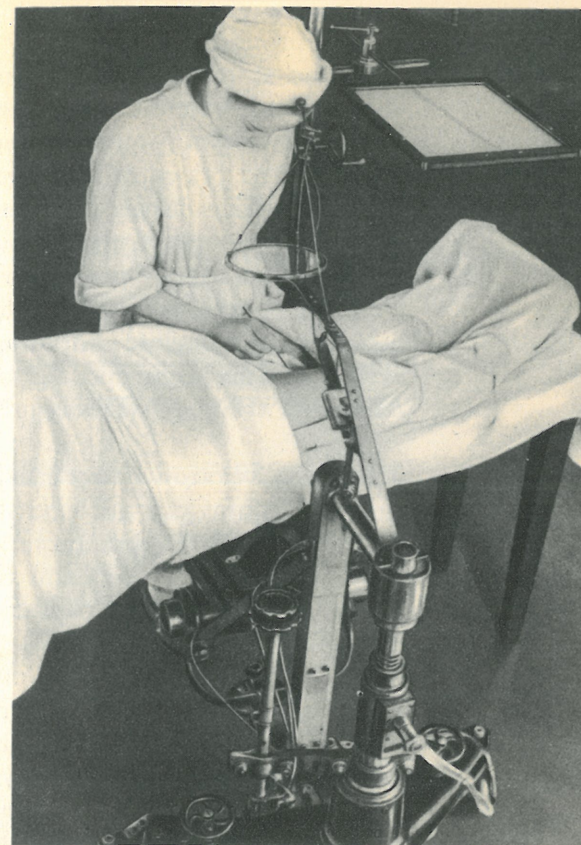
(150)





(151)

nie związane z osią wahadła, i to tak, że w chwili powrotu obrazu do znaczka żaróweczka znajdzie się w położeniu symetrycznym do szukanej igły względem szybki. Wtedy usuwa się ekran, oświetla się pokój zwykłym światłem i chirurg widzi przed sobą obraz podobny do fotografii (149): patrząc przez szybkę widzi pacjenta (152), a w nim żaróweczkę właśnie tam, gdzie jest igła. Może teraz operować nie narażając się na promienie Roentgena, które zostały wyłączone. Trafność lokalizacji nie zależy od kąta



(152)

widzenia chirurga, podobnie jak w zabawce przed chwilą opisanej.

Niektóre złudzenia optyczne są bardzo uderzające. Popatrzmy na drucianą siatkę taką jak na rysunku (11), ale skoncentrujmy spojrzenie na punkt przed nią, a następnie powoli, bez zmiany nastawienia osi oczu — zwróćmy uwagę na siatkę. Będzie miała mniejsze oczka niż zwykle, a gdy spróbujemy ją chwycić ręką, sięgniemy za krótko i chybimy. Złudzenie

bierze się stąd, że kwadraty są przystające i patrząc w punkt przed siatką widzimy prawym okiem kwadrat znajdujący się po lewej stronie, a lewym — inny kwadrat, który leży naprawdę na prawo od tamtego. Oba te kwadraty dają takie obrazy jak jeden mniejszy, położony w punkcie skrzyżowania linij widzenia. Skrzyżowanie leży przed prawdziwą siatką i efekt jest taki, jak gdyby cała siatka przesunęła się na tę odległość i odpowiednio się zmniejszyła. Można także odsunąć siatkę od siebie, ale to jest trudniej. (Dlaczego?).

Różnica obrazów lewoocznego i prawoocznego jest istotna dla widzenia stereoskopowego. Można uzyskać stereoskopowe widzenie (to jest takie, jak gdyby przed nami był przestrzenny model, a nie rysunek na papierze), gdy się użyje *anaglifów*. Trzeba narysować dwa perspektywiczne obrazy: jeden rzut modelu na papier z prawego oka jako centrum, drugi — z lewego oka. Pierwszy obraz rysuje się kolorem modrym, drugi czerwonym i patrzy się na nie przez dwubarwne okulary tak, że prawe oko patrzy przez czerwone szkiełko, a lewe przez modre. Wtedy widzi się obraz plastyczny. (Dlaczego?).

Gdy mamy przed sobą drut poziomo rozpięty, a nie widzimy słupków, które go podtrzymują, trudno nam ocenić jego odległość. Jest to skutek jednorodności drutu. Wystarczy jednak czerwona plamka lakieru na drucie, żeby to złudzenie znikło, kierujemy wtedy obie osi oczu na plamkę i doznajemy wrażenia odległości zupełnie określonej. Gdy nie ma plamki, wystarczy przechylić głowę na ramię. (Dlaczego?).

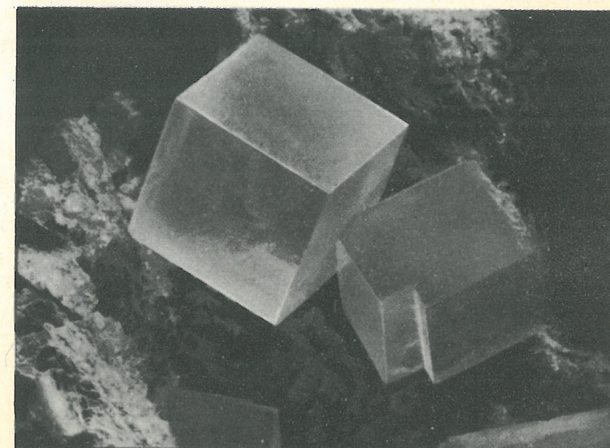
VII

SÓL
PAJĄKI I MUCHY
PAŁACE I CEGŁY

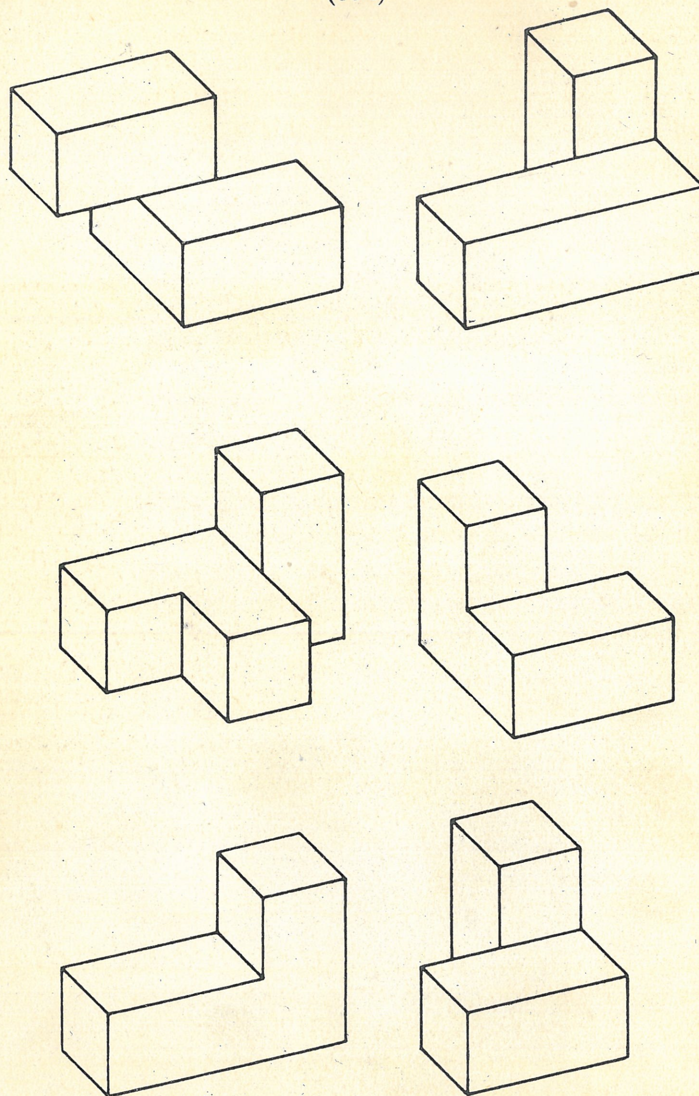
Przyroda realizuje sześciany jako kryształy soli NaCl (153). Można nimi wypełnić całą przestrzeń.

Można pomalować każdą ścianę sześcianu innym kolorem i można to zrobić 30 sposobami. Mając takich 30 modeli można wybrać którykolwiek i tak dobrać 8 innych, żeby z nich zbudować większy sześcian o takim samym rozkładzie kolorów na ścianach, jak u małego sześcianu, a przy tym jeszcze tak, by kolory ścian stykających się były zgodne.

(153)

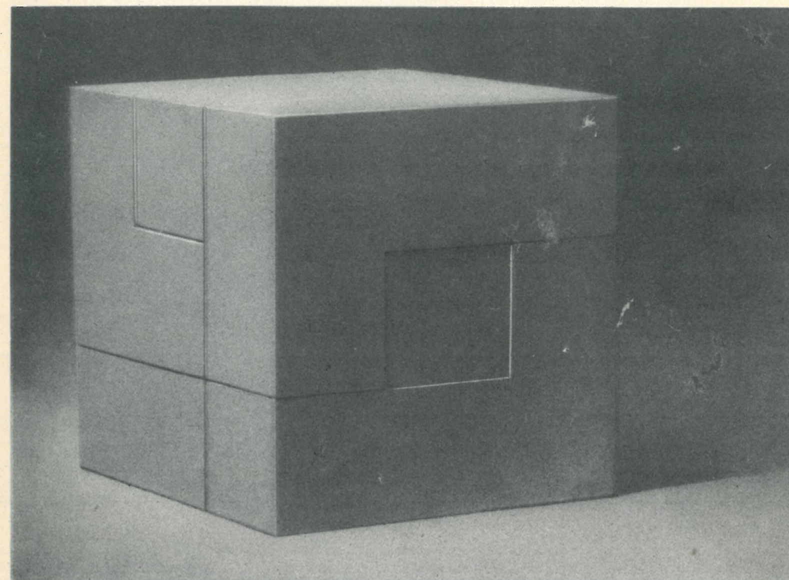


(154)

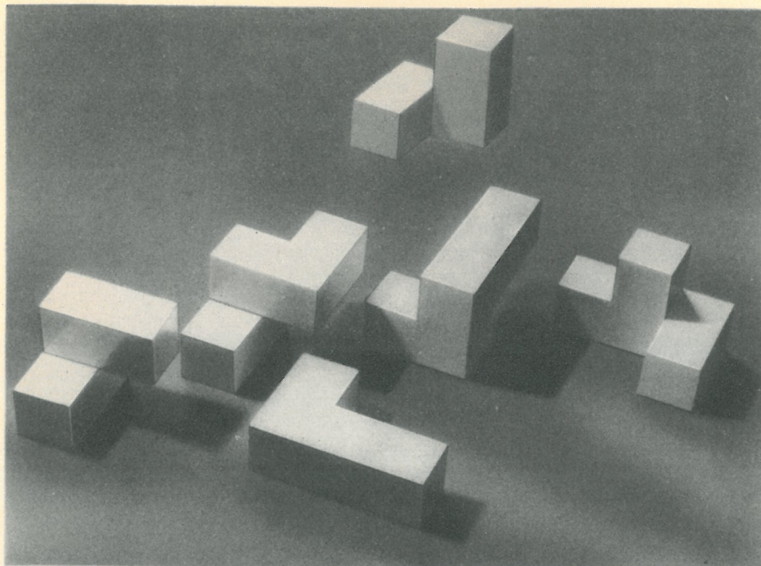


Z tych sześciu klocków (154) można złożyć sześcian (155), co nie jest wcale łatwe. Są dwa sposoby. Jeżeli sześcian ma krawędź 9 cm, to trzy klocki można uważać za sklejone z 5 sześcianków o krawędziach trzycentymetrowych, a trzy za sklejone z 4 takich sześcianków każdy. Dwa klocki są symetryczne. (Czy można było tego uniknąć?).

(155)

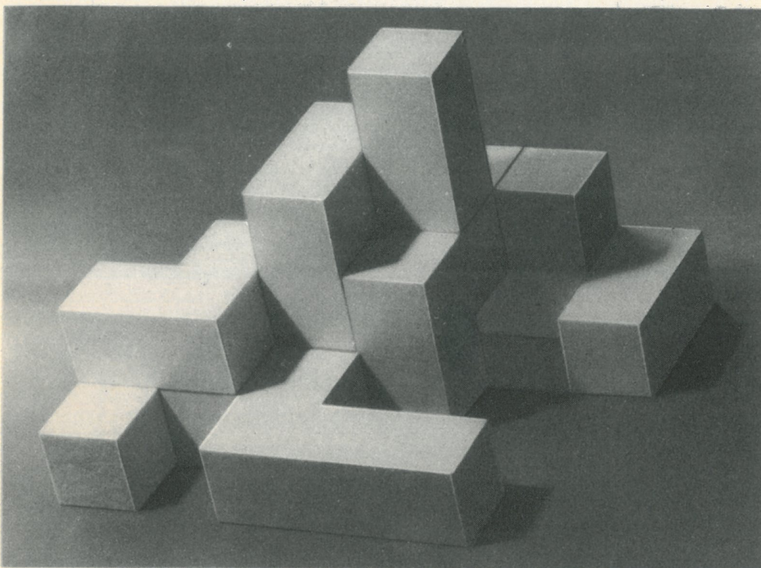


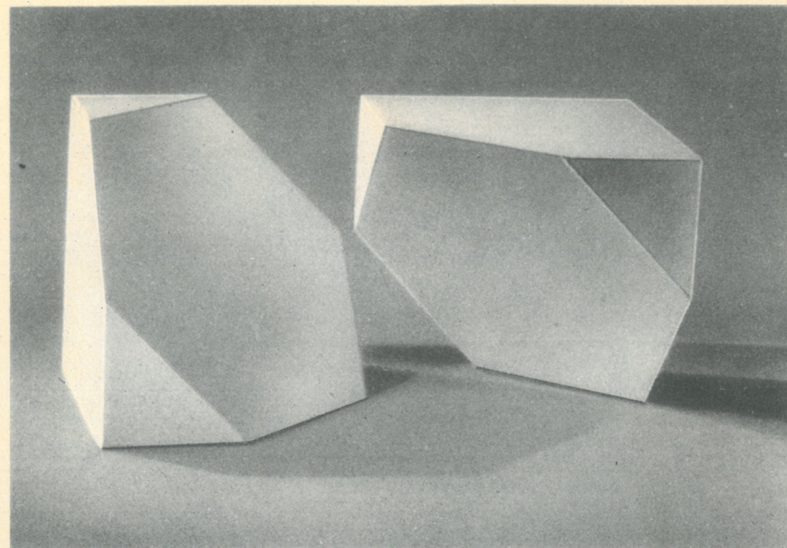
Składając klocki według fotografii (156 A) otrzymamy piękną makietę architektoniczną (156 B). Liczba takich modeli jest większa, niż może ułożyć człowiek, który by całe życie bezustannie tym się bawił.



(156 A)

(156 B)



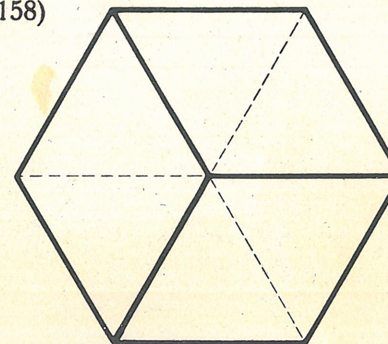


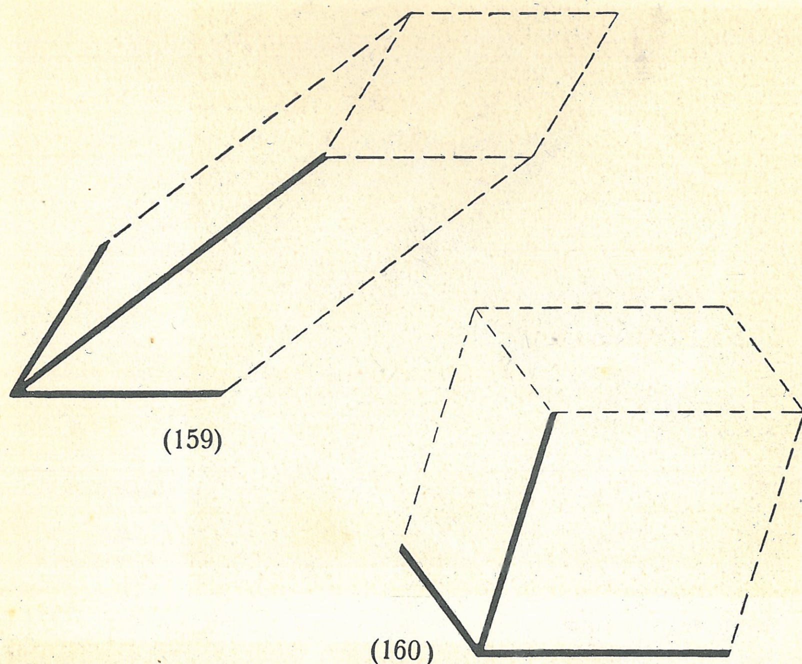
(157)

Sześcian przepołowiony płaszczyzną, która przecina prostopadle jego przekątną w środku, daje w przekroju (157) sześciobok foremny.

Sześciobok foremny powstaje także, gdy patrzymy z góry wzdłuż długiej przekątnej na sześcian, a pozioma płaszczyzna rzutu (158) jest prostopadła do tej przekątnej.

(158)



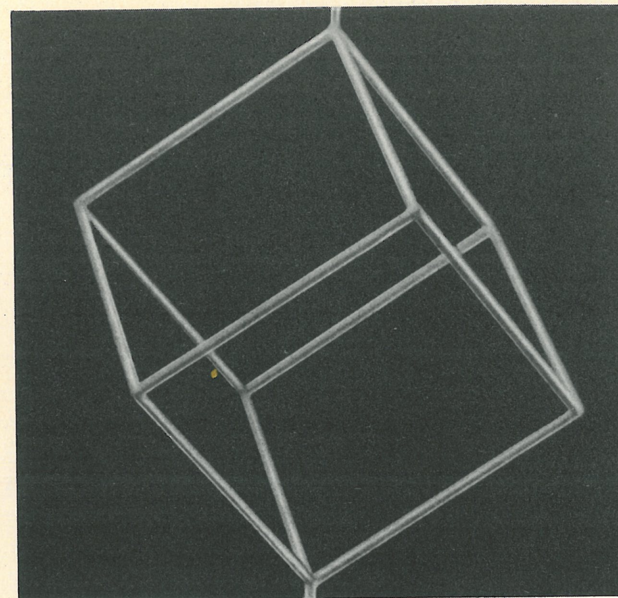


(159)

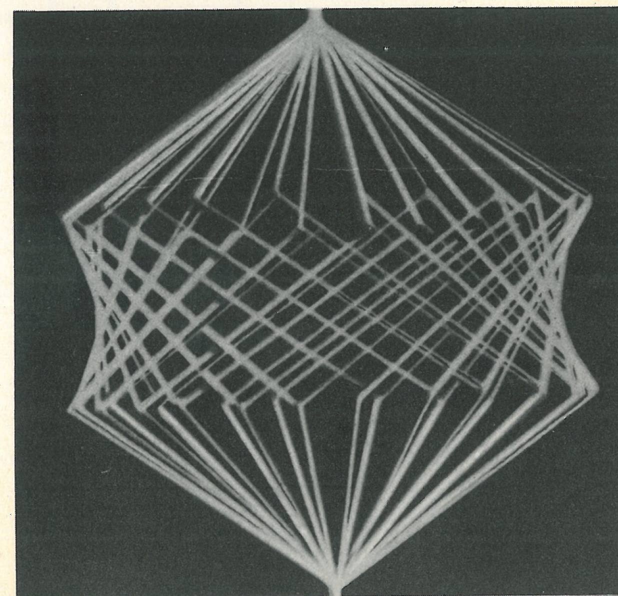
(160)

Można narysować trzy dowolne odcinki ze wspólnego wierzchołka, uzupełnić je równoległymi (kreskowanymi) i uważać rysunek (159), (160) za ukośny rzut sześcianu (jest to twierdzenie Pohlkego).

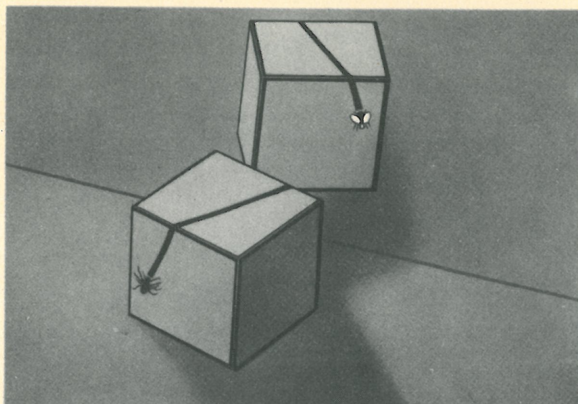
Gdy zrobimy model sześcianu z białego drutu (161), a następnie odfotografujemy kilka razy na tej samej kliszy, obracając przed każdym zdjęciem o ten sam kąt dokoła wielkiej przekątnej, otrzymamy obraz (162) złożony z dwóch stożków i hiperboloidy obrotowej. Na fotografii widać wyraźnie hiperbolę, która jest południkiem tej hiperboloidy. Widać też, że hiperboloida jest pokryta dwiema gromadami linij prostych.



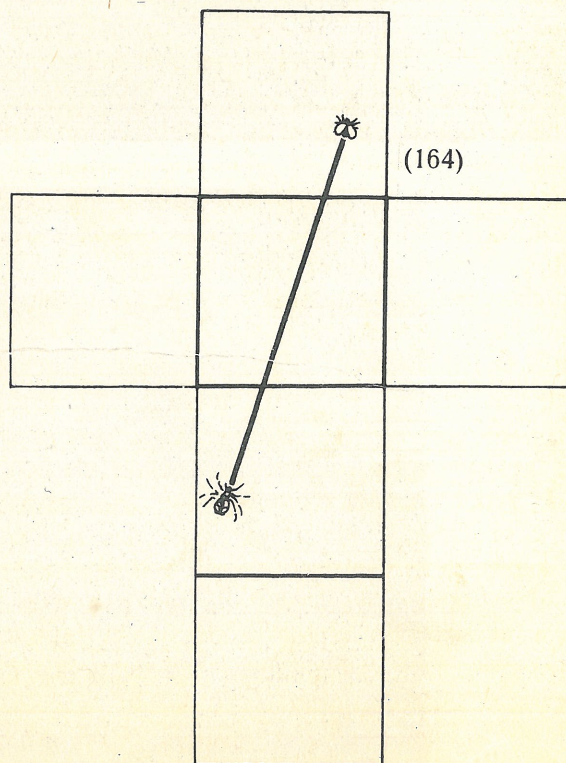
(161)



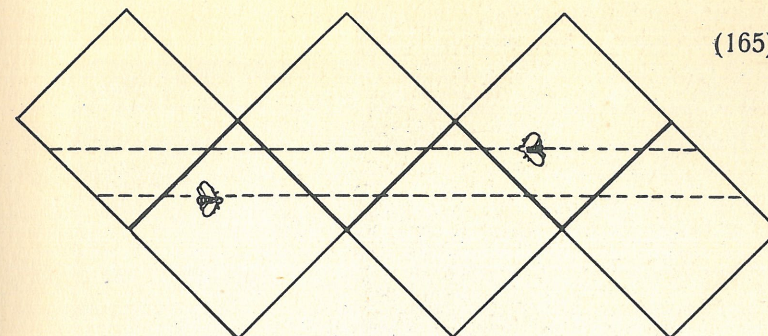
(162)



(163)



(164)

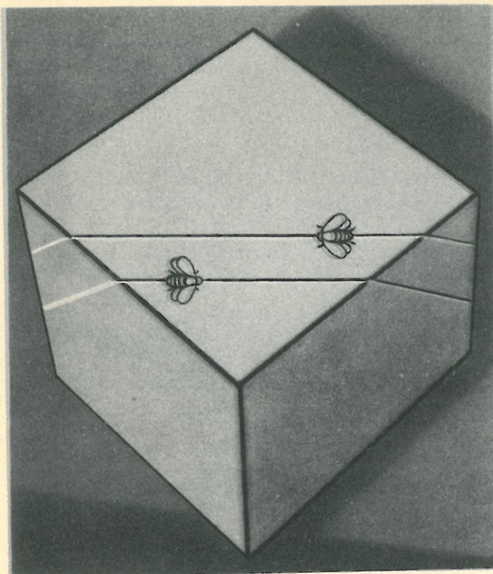


(165)

Linia prosta jest najkrótszą drogą. Gdy pająk siedzący na sześcianie (163) chce złapać muchę siedzącą na przeciwległej ścianie, znajdzie najkrótszą drogę jako prostą na siatce (164) sześcianu.

Gdy mucha chce się upewnić, że nie ma pająka na sześcianie, i chce obejść wszystkie ściany i wrócić jak najprędzej do pierwotnego miejsca, jej droga (165) na siatce też będzie prosta. Z rysunku widać, że punkt wyjścia nie wpływa na długość drogi okrężnej (166).

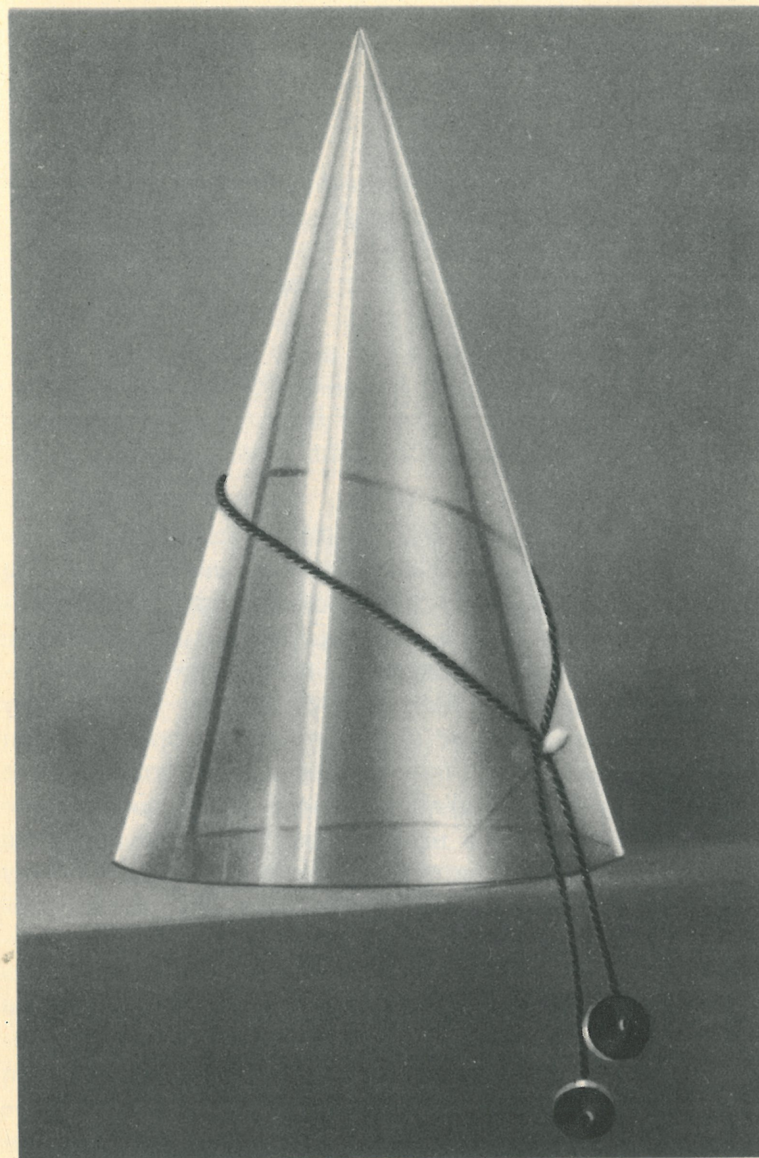
Mucha ma jednak zawsze dwie drogi do wyboru. Te najkrótsze drogi okrężne są sześciobokami o jednakowej długości i przez każdy punkt sześcianu przechodzą dwie takie linie, prostopadłe do siebie. Ale widać z rysunku (165), że każda rodzina dróg równoległych pokrywa tylko połowę powierzchni sześcianu, a więc są cztery rodziny dróg. (Dlaczego?). Gdy każdą rodzinę utkamy z nitek innego koloru, powstanie tyle odcieni, ile jest par kolorów, a więc 6 (bo przez każdy punkt przechodzą dwie nitki). Na każdej ścianie pojawią się cztery odcienie, przy czym każdy odcień obejmie trójkątną ćwiartkę ściany. (Czy każda ściana będzie inaczej zabarwiona?).

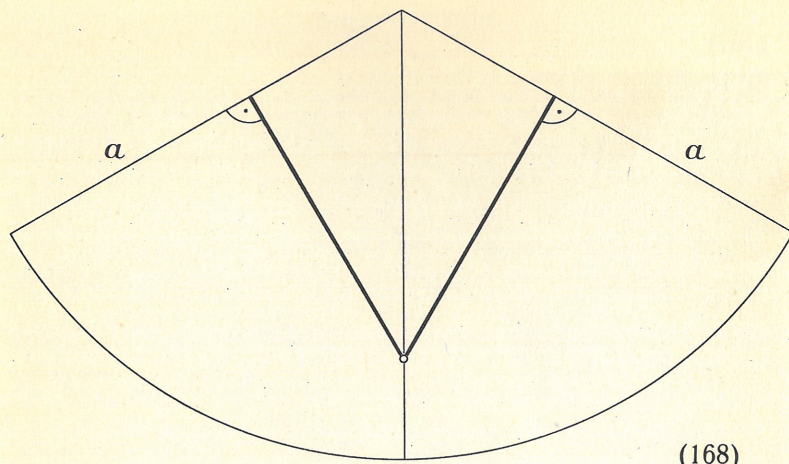


(166)

Chcąc znaleźć najkrótszą drogę możemy czasem z powodzeniem zastosować sposób pająka i muchy: rozłożyć powierzchnię na płaszczyźnie, narysować prostą, a potem zwinąć model z powrotem do pierwotnego kształtu. Na przykład stożek jest powierzchnią utkaną z linij prostych. Mucha, chcąc obejść go dookoła i wrócić jak najprędzej tam, skąd wyszła, pójdzie po pętli (167) i wróci pod kątem do kierunku startu. Stożek rozcięty wzdłuż jednej z prostych i rozłożony da wycinek koła (168), a droga muchy będzie się składała z dwóch odcinków prostych, prostopadłych do promieni granicznych. Gdy jednak stożek jest równoboczny lub jeszcze bardziej tępy, rozwiązanie jest inne: mucha idzie prosto na szczyt, rozgląda się dookoła i wraca po tej samej drodze na dół.

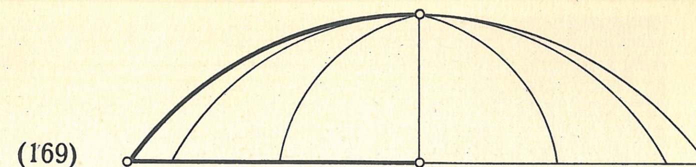
(167)





(168)

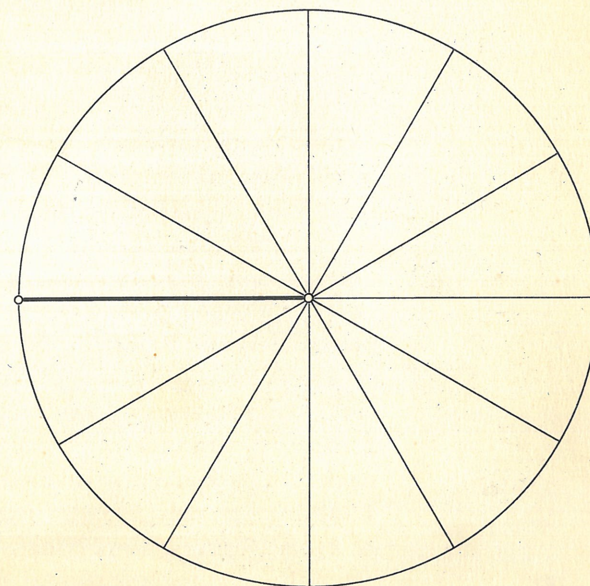
Ale są powierzchnie, których nie można rozłożyć płasko tak, jak stożek; kula jest taką powierzchnią. Najkrótsze linie na kuli — to są wielkie koła, zwane ortodromami; każdy południk jest ortodromą. Przypuśćmy, że udało się nam rozłożyć kulę na płaszczyźnie bez rozciągania. Wszystkie ortodromy zachowałyby swoją długość i stałyby się najkrótszymi liniami na płaszczyźnie, to znaczy prostymi. Są one jednak zamknięte, a linie proste nie. Z tego już wynika niemożliwość rozpostarcia kuli na płaszczyźnie. Ale nawet gdy poprzestajemy na części kuli, na przykład na strefie podbiegunowej, napotykamy sprzeczność: południki zbiegające się (169) w biegunie północnym stają się po rozpostarciu (170) odcinkami prostymi o równych długościach, a cała strefa zamienia się na tarczę, której brzegiem jest koło. To koło, jest to koło polarne, które też zachowuje długość, promień zaś jego jest

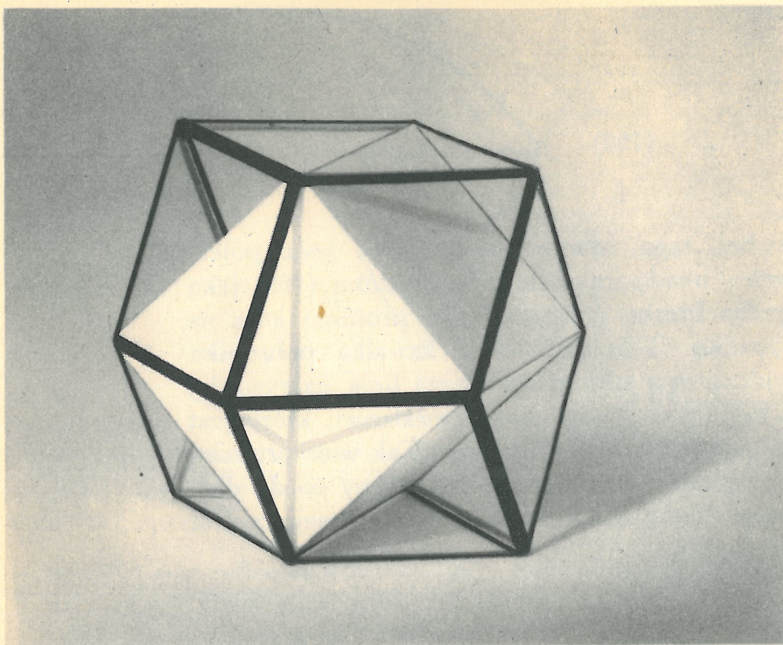


(169)

wobec tego równy promieniowi koła polarnego, uwidocznionemu na rysunku (169) jako gruba kreska pozioma. Ale promień koła na rysunku (170) powstał z kawałka południka widocznego jako gruba zgięta linia na rysunku (169) i jest równy temu kawałkowi, który jest dłuższy od kreski poziomej. Tak więc promień rozpostartej strefy musi być równy co do długości dwóm liniom, dłuższej i krótszej, co jest niemożliwe.

(170)



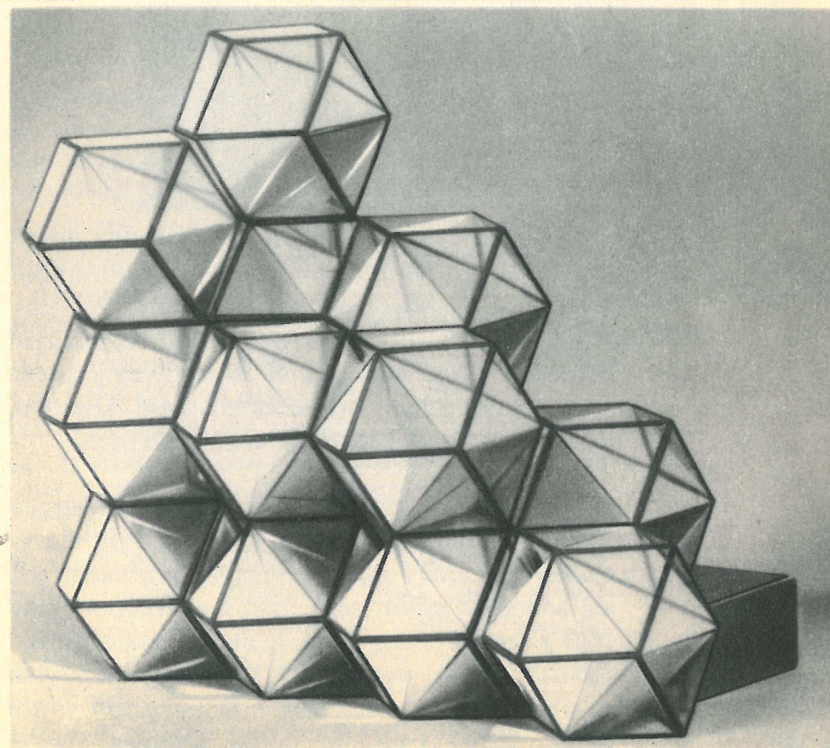


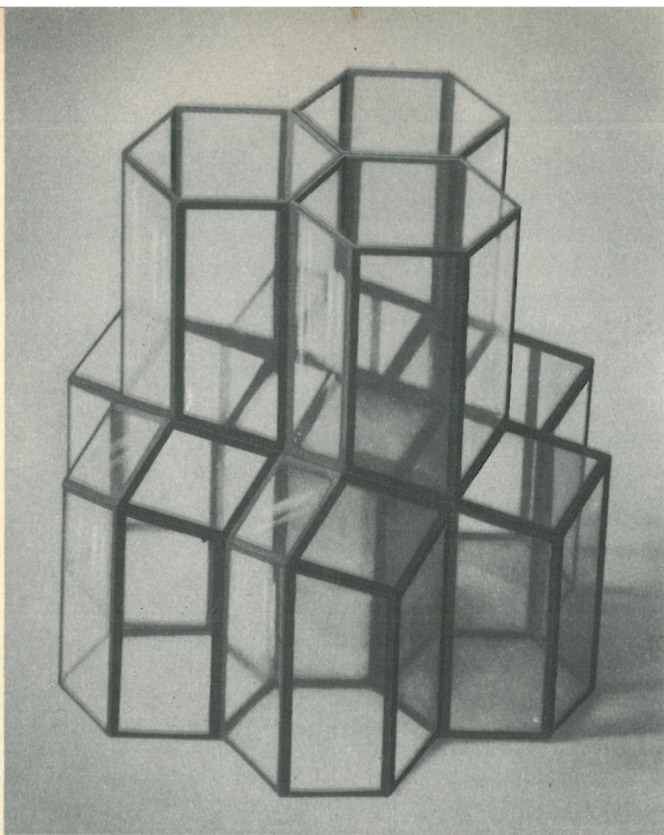
(171)

Już wspomnieliśmy raz o wypełnianiu całej przestrzeni sześcianami. Możemy z tego otrzymać inne wypełnienie w taki sposób: Sześciany robimy na przemian białe i czarne, jakby szachownicę przestrzenną, a potem usuwamy czarne. Próżną przestrzeń po czarnym sześcianie rozkładamy na 6 piramid o wspólnym wierzchołku w środku pustej przestrzeni. Gdy teraz (171) wyobrazimy sobie biały sześcian wraz z sześciu piramidami stojącymi na jego ścianach, to zobaczymy dwunastościan rombowy z wpisanym sześcianem. Jest widoczne (172), że tym sposobem wypełniliśmy całą przestrzeń równymi dwunastościanami rombowymi. Łatwo obliczyć objętość takiego dwunastościanu: Trzeba było dwóch sześcianów na jeden dwunastościan, więc ma on objętość dwa razy większą niż sześcian, to znaczy $2a^3$, gdy przez a oznaczymy krawędź sześcianu. Krótsza przekątna rombu jest a, dłuższa $a\sqrt{2}$, więc bok rombu jest $b = a\sqrt{3}/2$, a objętość dwunastościanu $2a^3$ jest $16b^3/(3\sqrt{3})$.

Wierzchołki są dwojakie: 1) gdzie się schodzą cztery bryły, 2) gdzie się schodzi sześć brył.

(172)

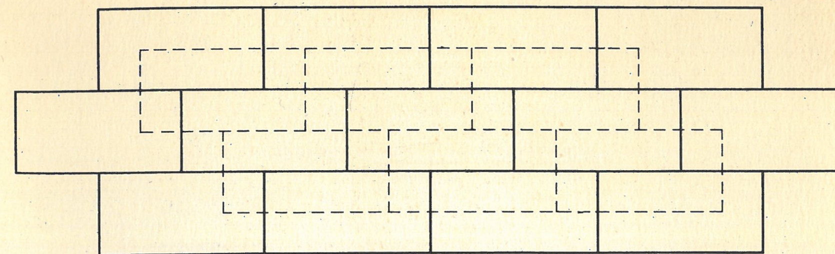




(173)

Komórki w plastrze pszczelnym można otrzymać z dwóch warstw dwunastościanów rombowych (173) zastępując wolne ściany (po trzy w każdym dwunastościanie) sześciobocznym otworem. Stąd wniosek, że w każdym plastrze są punkty, gdzie się schodzi sześć komórek i takie, gdzie się schodzą cztery komórki.

Jest ciekawe, czy można wypełnić przestrzeń równymi wielościanami tak, by w każdym wierzchołku schodziły się cztery bryły (nie może ich się schodzić tylko trzy). Do tego rozpatrzymy mur z cegieł rozciągający się na wszystkie strony. Kładąc dolną warstwę (174) postępujemy jak murarz, który uważa, żeby fugi wypadały w pół cegły. Zauważmy, że dolna warstwa (pełne

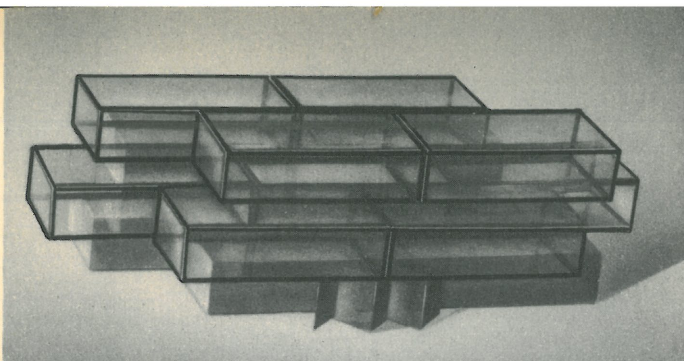


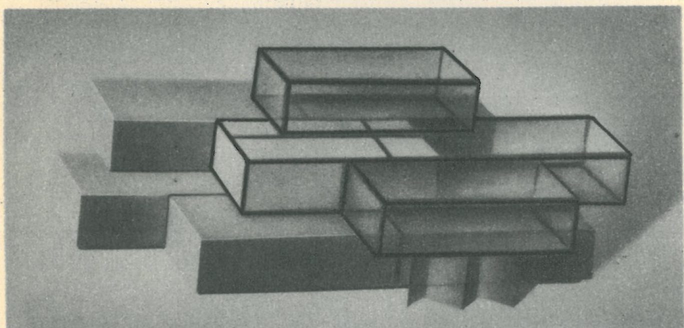
(174)

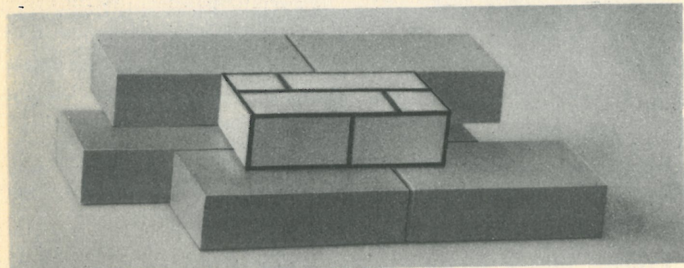
linie na rysunku) nie jest istotnie nowym parkietażem płaszczyzny. Gdy uznamy każdy punkt, gdzie się schodzą trzy cegły — za wierzchołek, zobaczymy, że każde pole jest sześcioboczne, a rysunek pełny (174) jest tylko deformacją wzoru plastrowego (55).

Kładąc drugą warstwę na pierwszą (linie kreskowane) chcemy pokryć każdy wierzchołek cegłą. Teraz już w każdym wierzchołku zamurowanym z góry i z dołu schodzi się po cztery cegły. Trzecią warstwę kładziemy na drugą tak, żeby każda cegła trzeciej leżała dokładnie nad jakąś cegłą pierwszej warstwy — i powtarzamy ten proces w coraz wyższych warstwach. Policzmy teraz (175), ile sąsiadów ma każda cegła. Jest 6 w tej samej warstwie, 4 nad nią i 4 pod nią, razem 14.

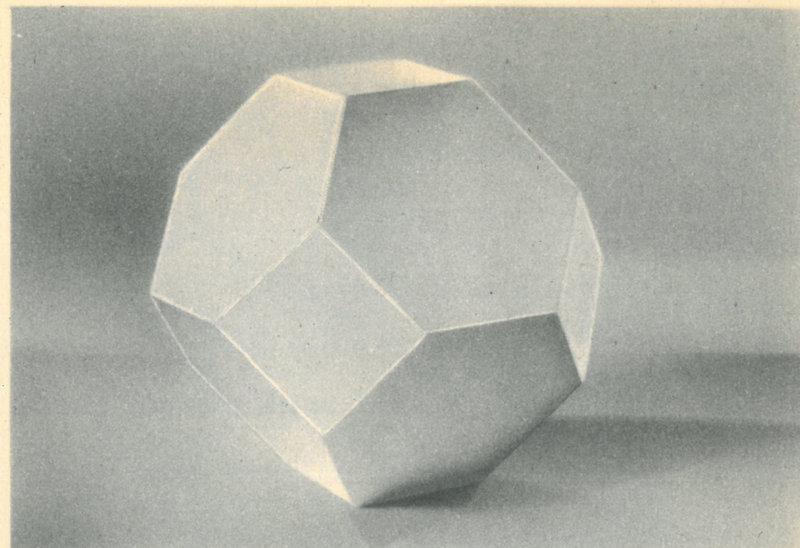
Niech krawędzie cegieł będą pomalowane na czarno. Rozbierając stopniowo budowę (176), (177) zobaczymy na białej cegle nie tylko jej własne, czarne krawędzie, ale także czarne ślady pozostawione przez krawędzie przyległych cegieł. Tak więc cegła jest czternaścianem zgniecionym do kształtu zwykłej cegły. Chcąc znaleźć kształt niezgnieciony zauważmy, że na cegle jest 6 „kwadratów" i 8 „sześcioboków". To wskaże nam szukany

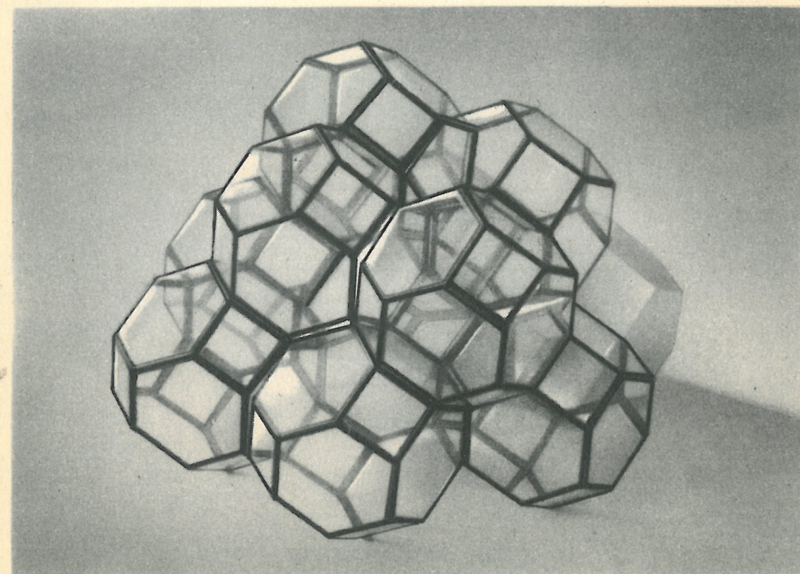

(175)


(176)


(177)

czternastościan (178), który — nawiasem mówiąc — można dostać przez obcięcie wierzchołków ośmiościanu. Jest to rozdęta cegła i można nią wypełnić (179) całą przestrzeń (jak przedtem murem) tak, że w każdym wierzchołku schodzą się tylko cztery bryły. Jest ona semiregularna (półforemna) to znaczy, że jej ściany są wielobokami foremnymi. Nie ma innej bryły o tych samych własnościach, a więc ona daje najprostszy rozkład przestrzeni na części równe.


(178)

(179)


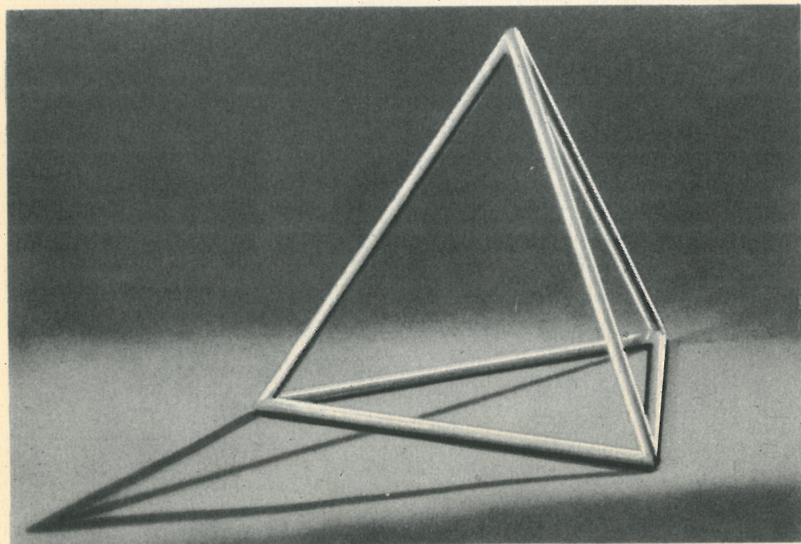
VIII

BRYŁY PLATOŃSKIE
KRYSZTAŁY
DROŻDŻE
MYDŁO

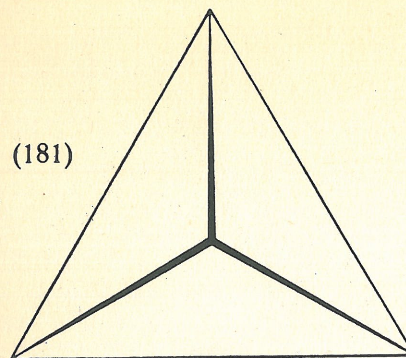
Już Plato wiedział, że jest tylko pięć brył regularnych.

Jak zrobić cztery trójkąty z sześciu zapałek? Do tego trzeba z trzech zapałek zrobić trójkąt podstawowy, a z reszty — trzy krawędzie ostrosłupa (piramidy). Tak powstanie (180)

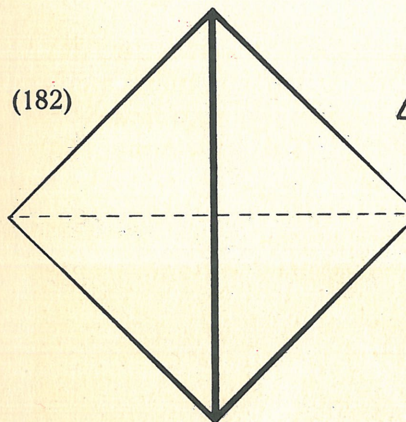
(180)

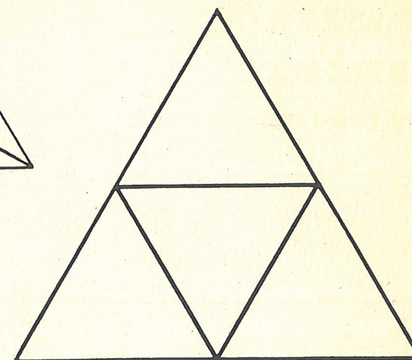


(181)



(182)

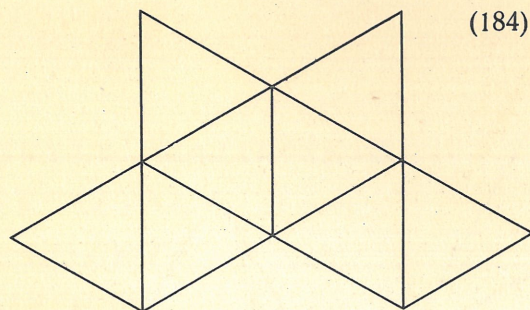




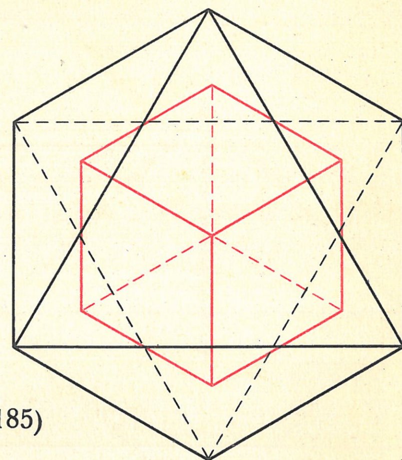
(183)

czworościan foremny, pierwsza z brył platońskich. Wygląda on tak (181) w rzucie prostopadłym na podstawę. Inny rzut (182) da kwadrat z przekątnymi, a model można zbudować z siatki (183).

O drugiej bryle platońskiej, o sześcianie, już mówiliśmy. Z 27 jednakowych sześcianów można zbudować większy sześcian. Gdy pomalujemy ściany większego sześcianu na czarno, a potem rozłożymy go na mniejsze, to będzie



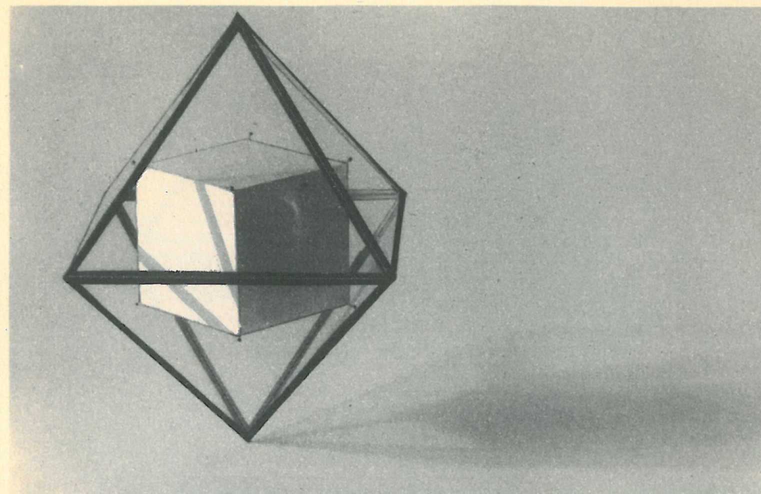
(184)



(185)

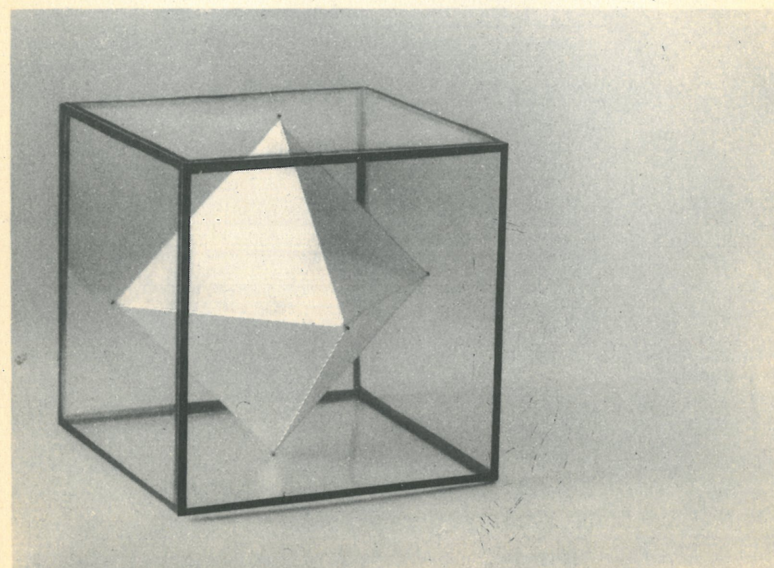
wśród nich pewna liczba sześcianów o trzech czarnych ścianach, inna o dwóch, inna o jednej, a będą też sześciany nietknięte farbą. Ile będzie w każdej grupie?

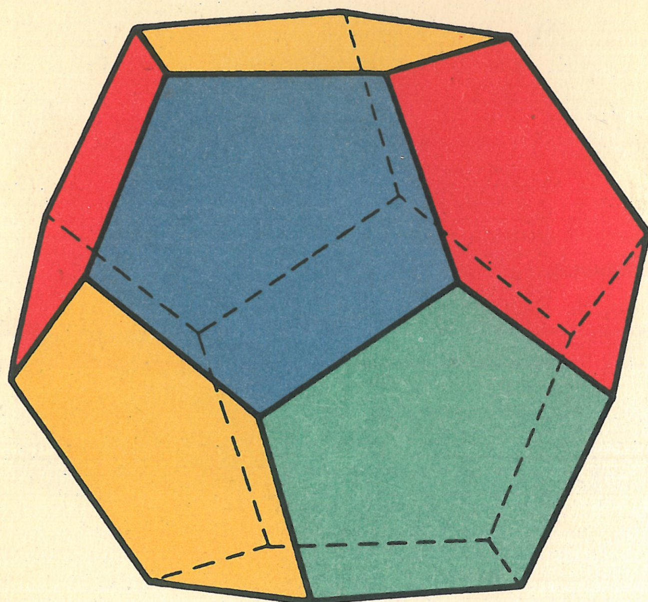
Z ośmiu trójkątów równobocznych (184) da się zbudować trzecia bryła platońska, ośmiościan foremny. Stawiając go na jednej ze ścian i rzutując na płaszczyznę podstawy otrzymamy rysunek (185), który pokazuje, że środki ścian ośmiościanu foremnego są wierzchołkami sześcianu (186). Na odwrót (187) środki ścian sześcianu są wierzchołkami ośmiościanu.



(186)

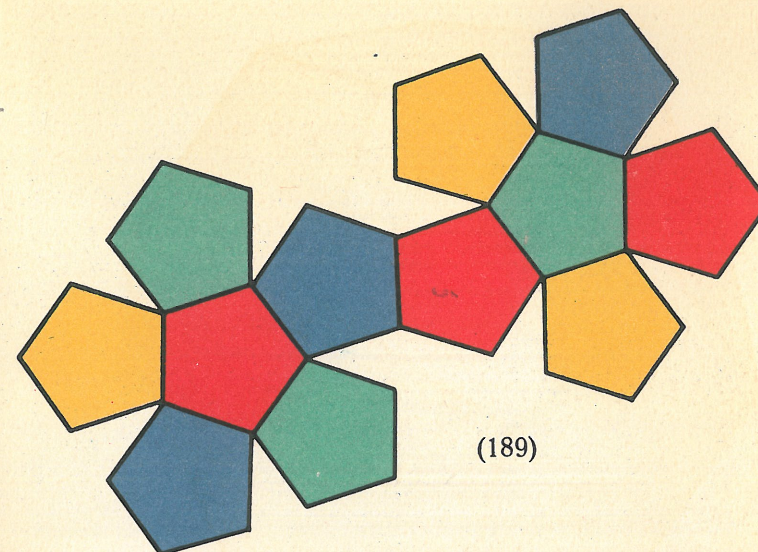
(187)





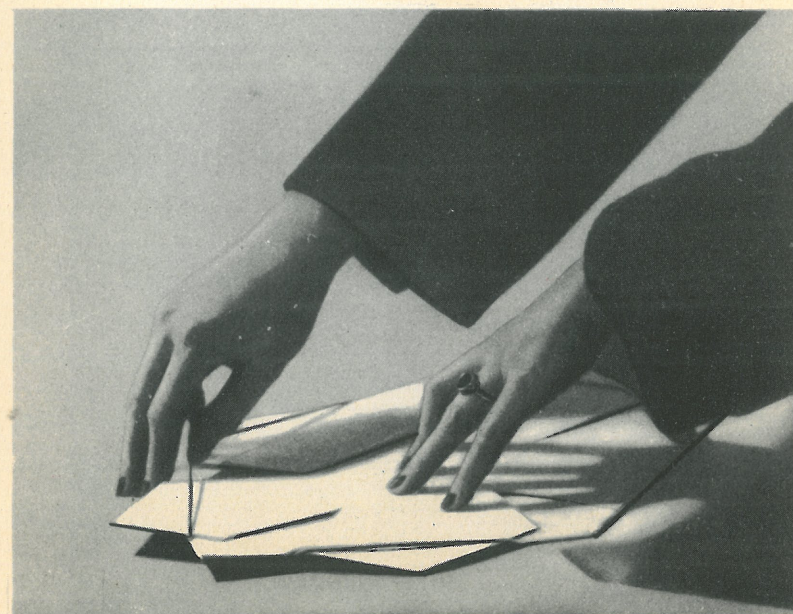
(188)

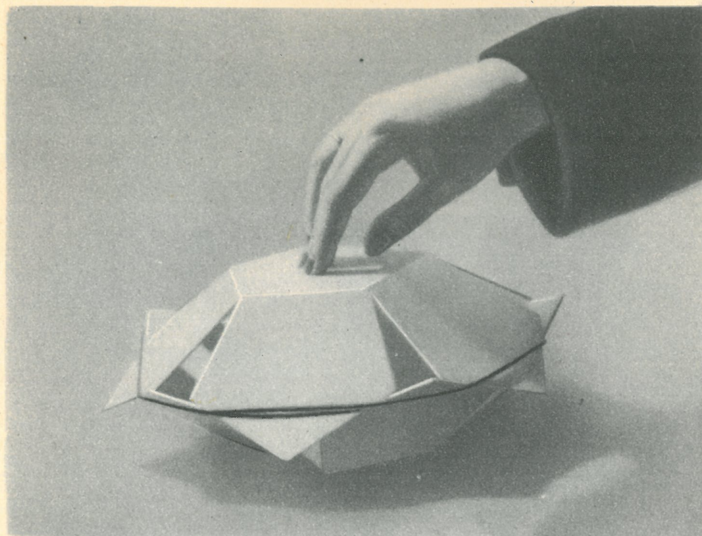
Następna bryła platońska, dwunastościan foremny (188), ma ściany pięcioboczne. Z siatki (189) możemy łatwo zrobić model. Trzeba scyzorykiem nadciąć krawędzie (po tej stronie, która będzie zewnętrzem modelu); podzieliwszy siatkę na dwie gwiazdy kładzie się je — jedną na drugiej (190) tak, żeby powstała gwiazda o 10 rogach i wiąże się gumką przeprowadzając ją na przemian pod rogami i nad nimi, a drugą ręką przyciska się model do stołu. Podnosząc rękę (191) widzimy, jak z gwiazdy powstaje (192) model przestrzenny dwunastościanu.

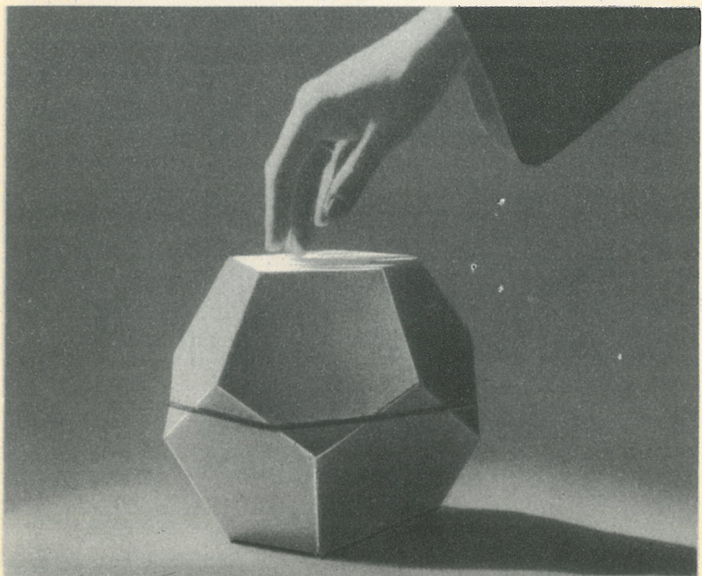


(189)

(190)

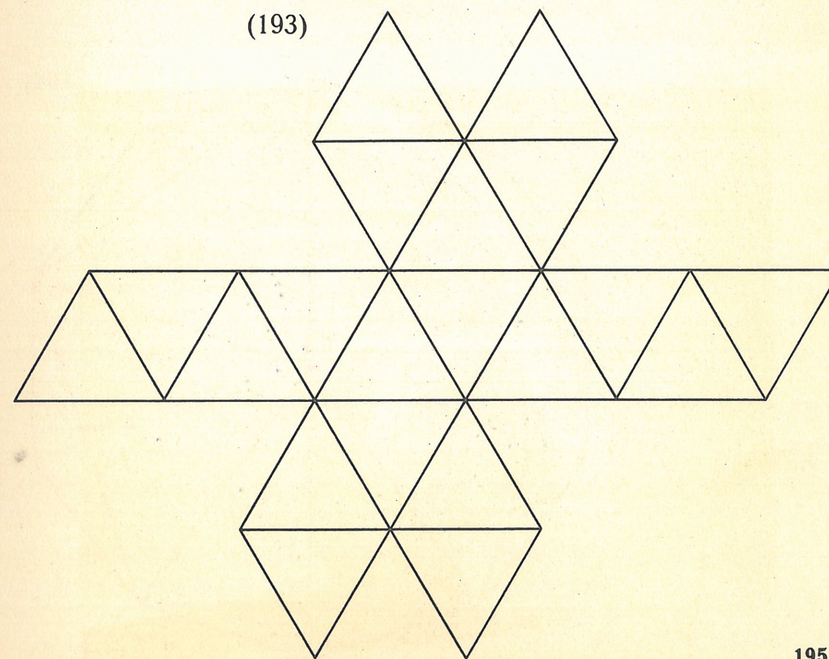


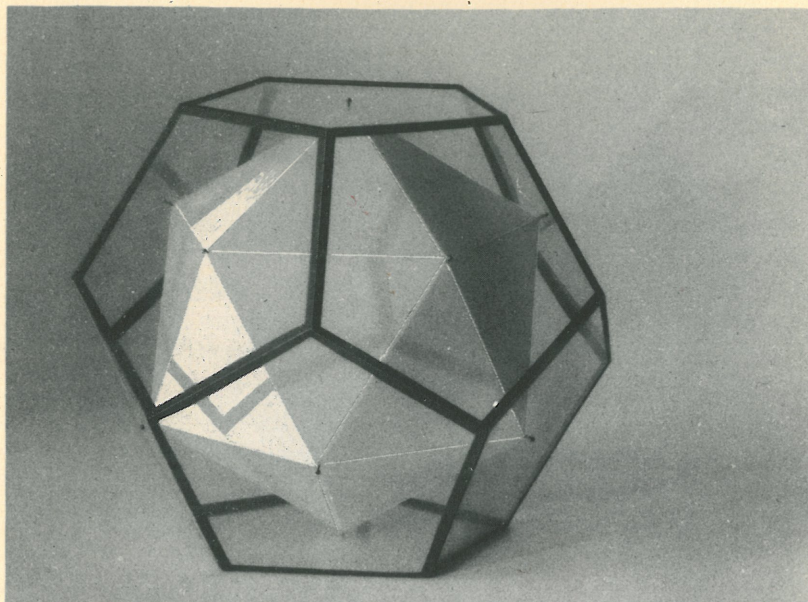

(191)

(192)


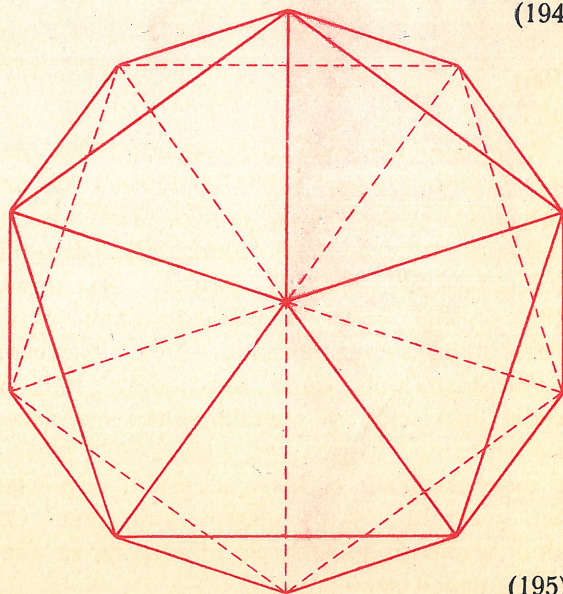
Do pomalowania dwunastościanu tak, żeby sąsiednie ściany miały różne barwy, nie wystarczy mniej niż 4 kolory. Gdy wybierzemy kolory (np. czerwony, niebieski, zielony i żółty), będzie można pomalować dwunastościan w dwa tylko różne sposoby, jeżeli uważamy za jednakowo pomalowane dwa modele, które powstają jeden z drugiego przez obrót. Te dwa istotnie różne pomalowania są symetryczne, to znaczy, że jeden model da obydwa, gdy trzymamy go przed lustrem.

Ostatnią regularną bryłą jest dwudziestościan. Jego siatka (193) składa się z 20 trójkątów równobocznych.

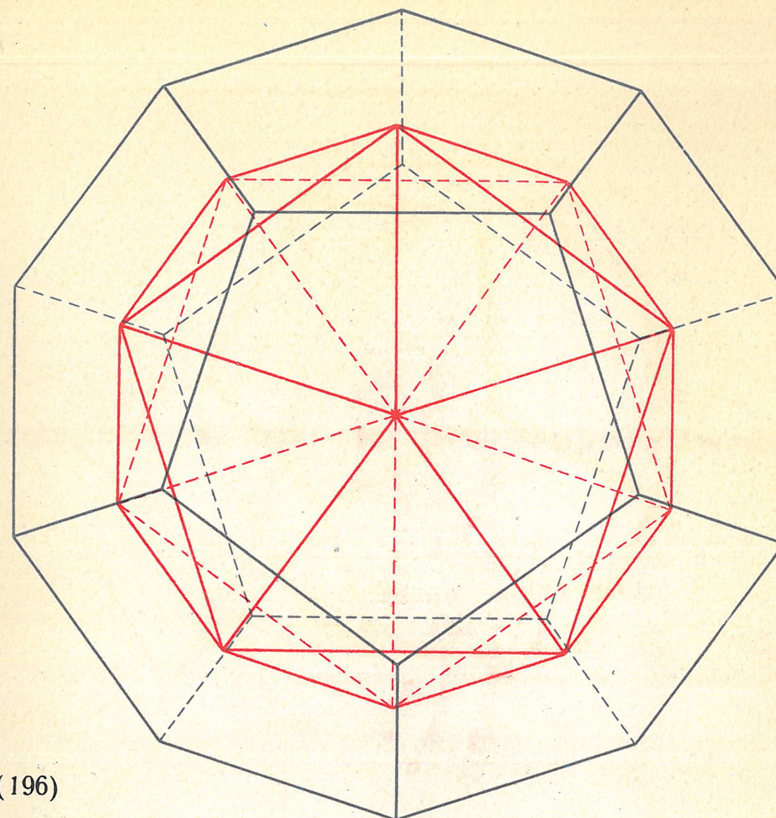
(193)




(194)

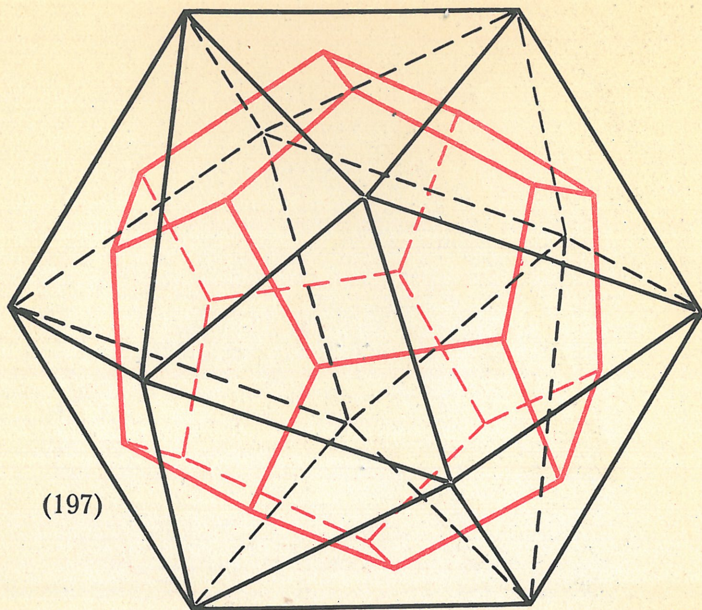


(195)



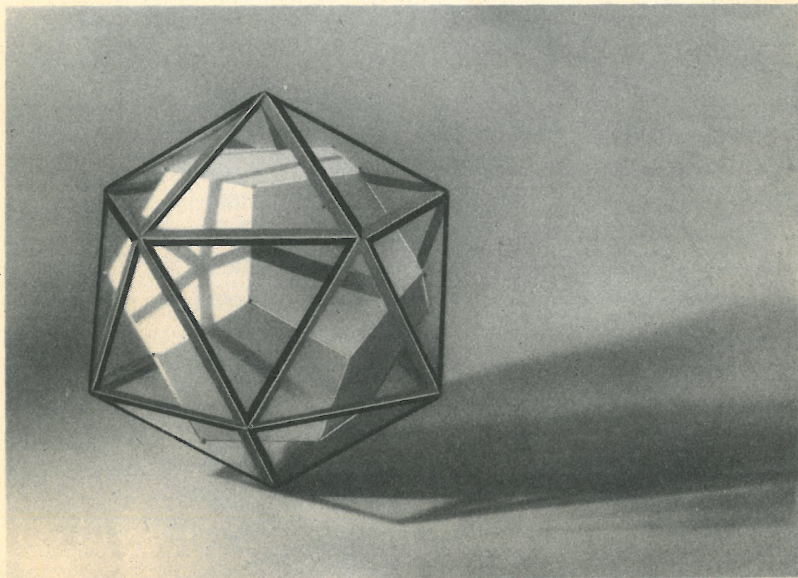
(196)

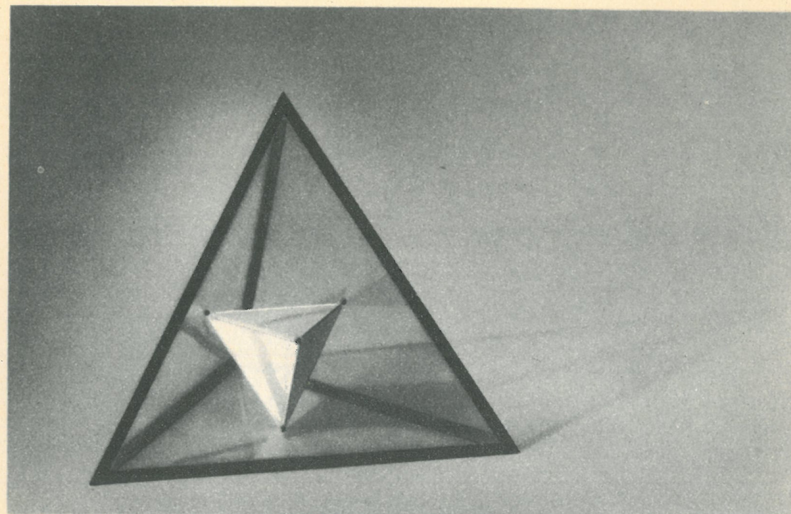
Rzut poziomy dwudziestościanu (195) może być skombinowany (196) z rzutem dwunastościanu; rzeczywiście, środki ścian dwunastościanu tworzą (194) wierzchołki dwudziestościanu, jak dowodzi model. Na odwrót (197) środki ścian dwudziestościanu tworzą wierzchołki dwunastościanu (198). Natomiast czworościan odpowiada sam sobie (199), bo środki jego ścian są wierzchołkami mniejszego czworościanu. Można też wpisać (200) sześcian w dwunastościan wybierając osiem odpowiednich wierzchołków dwunastościanu; niech czytelnik wyobrazi sobie bryłę utworzoną ze wszystkich takich sześcianów!



(197)

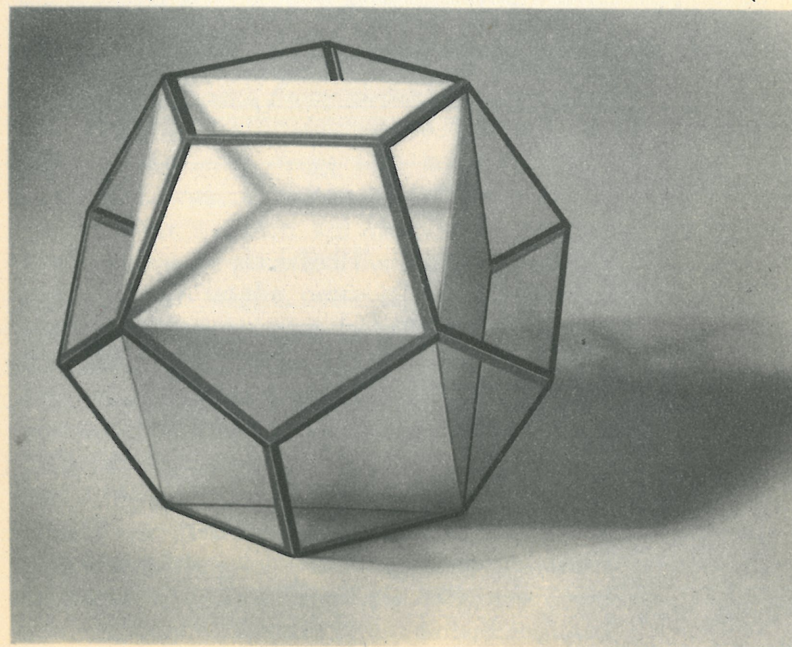
(198)

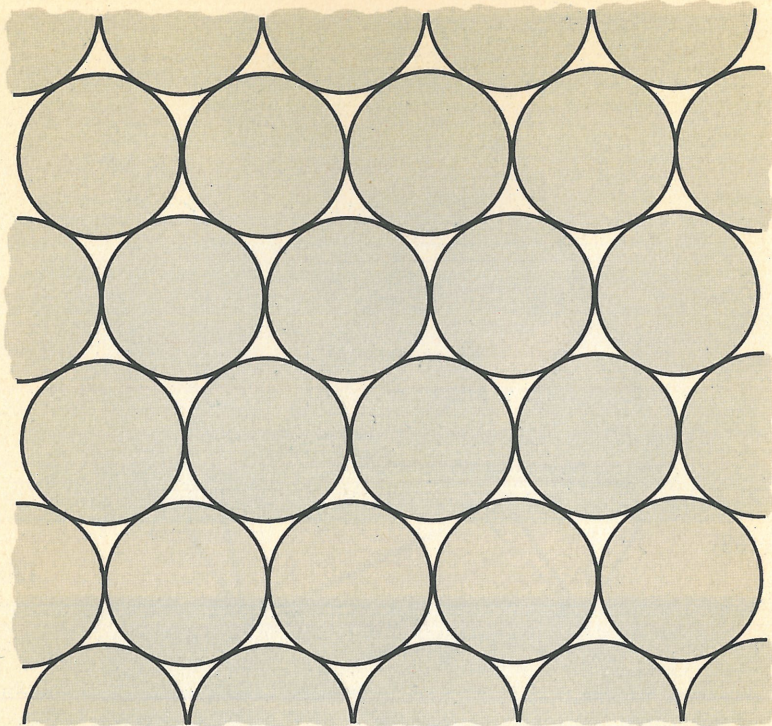




(199)

(200)





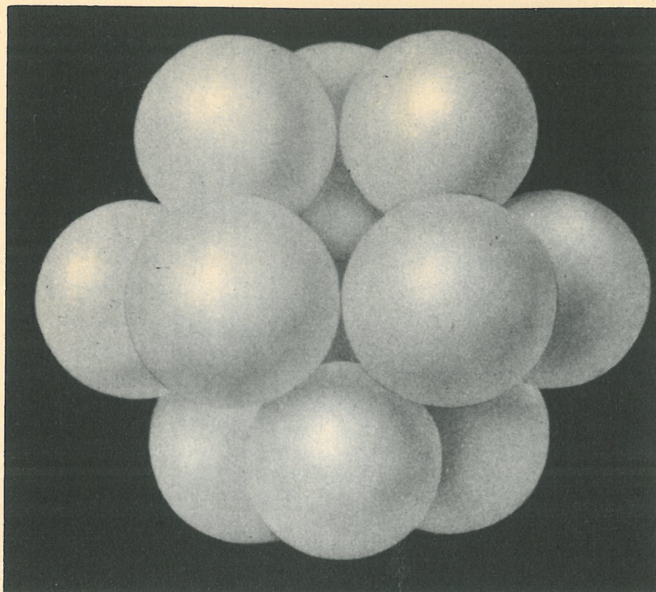
(201)

Kule jednakiej wielkości nie wypełniają przestrzeni ściśle. To samo odnosi się do kół na płaszczyźnie (201): ich najgęstsze ułożenie przypomina plaster pszczelny i możemy sobie łatwo wyobrazić, jak koła zgniecione stałyby się sześciobokami. Najgęstsze ułożenie kul można otrzymać dzieląc całą przestrzeń na sześcienne komórki (ale bez ścian, tylko z krawędziami z drutu), nazywając je na przemian białymi i czarnymi i wstawiając w każdą białą komórkę taką dużą kulę, jaką tylko się da. Tym sposobem połowa komórek będzie zajęta przez kule i będzie łatwo

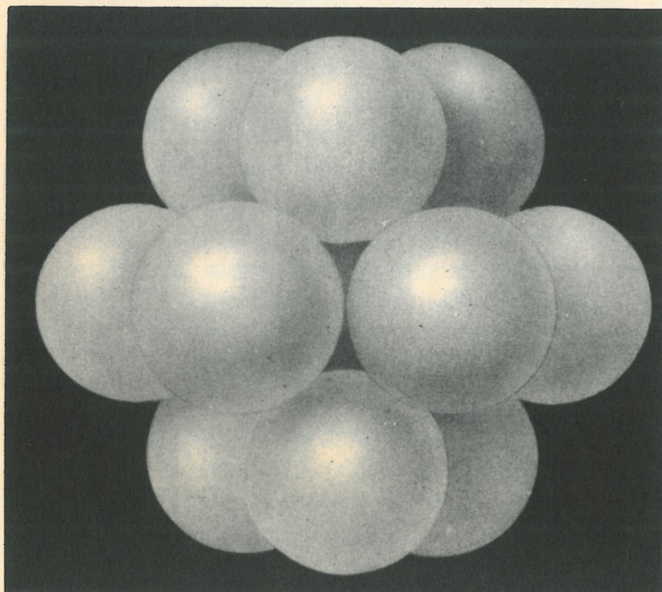
obliczyć stosunek części przestrzeni wypełnionej kulami do całej przestrzeni. Przypada jedna kula na każdą parę komórek. Gdy krawędź komórki jest a, promień kuli, jako pół przekątnej kwadratu a^2, będzie $a/\sqrt{2}$. Objętość kuli będzie zatem $(4/3)\pi\ (a/\sqrt{2})^3$, a ponieważ objętość pary komórek jest $2a^3$, więc szukany stosunek jest $\pi\sqrt{2}/6 = 0{,}7405$.

Tak więc kule w najściślejszym ułożeniu zajmują około 74% całej przestrzeni. Gdy zatem mamy mydło benzynowe, w którym jest więcej niż 75% mydła, jesteśmy pewni, że nie jest to zawiesina kuleczek mydlanych w ośrodku benzynowym, lecz że kuleczki benzynowe tworzą zawiesinę w mydle. Taka emulsja nie jest zapalna (dlaczego?) i mydło zawierające mniej niż 25% benzyny nie jest niebezpieczne w użytku domowym.

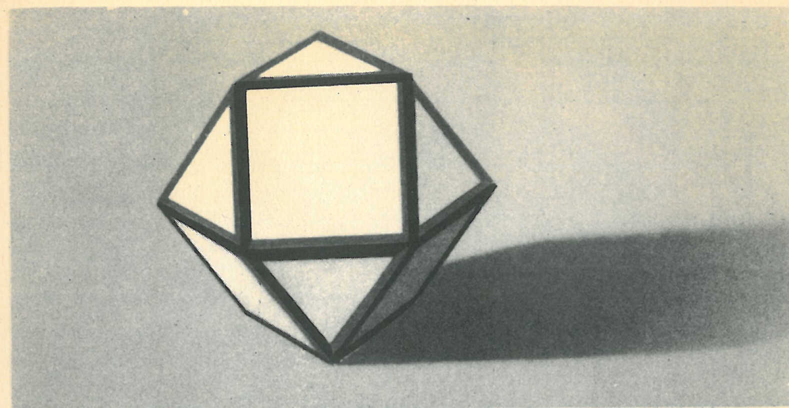
Jest inna droga wiodąca do najgęstszego ułożenia kul. Kładziemy naprzód warstwę kul tak, żeby z góry wyglądała jak na rysunku (201). Na nią kładziemy drugą taką samą tak, żeby każda kula wyższej warstwy osiadła w gniazdku utworzonym z trzech kul niższej. Zauważmy, że nie wszystkie gniazdka będą obsadzone: gdy jakieś zostało zajęte, to już sąsiednie musi być wolne. Wobec tego, gdy przyjdzie do położenia trzeciej warstwy, będziemy mieli wybór: albo położyć kule nad tymi gniazdkami najniższej warstwy, które nie zostały obsadzone przez drugą warstwę (202), albo położyć je dokładnie nad kulami najniższej warstwy (203); tak kładziemy coraz wyższe warstwy. W każdym ułożeniu każda kula warstwy pośredniej styka się z 12 sąsiadkami. W pierwszym ułożeniu punkty styczności są wierzchołkami „ku-



(202)



(203)

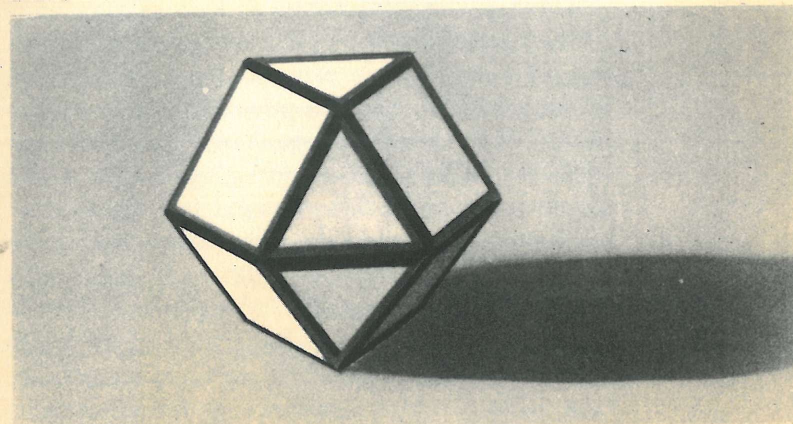


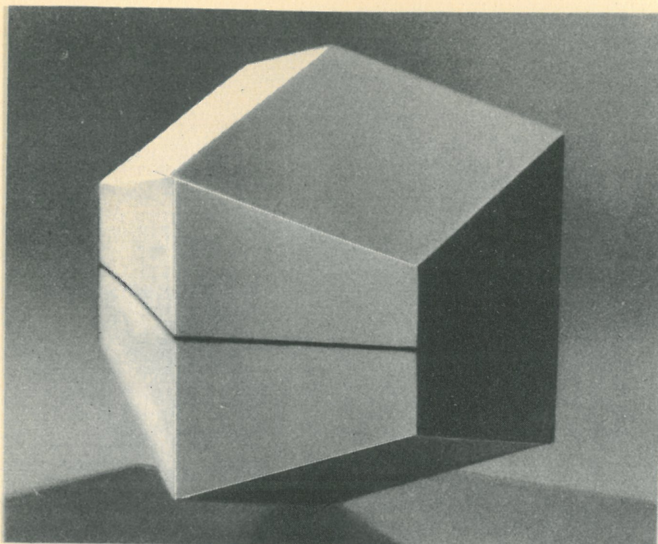
(204)

booktaedru", czyli kryształu argentytu Ag_2S (204), powstającego z obcięcia ośmiościanu foremnego przez sześcian, którego ściany połowią krawędzie ośmiościanu.

W drugim ułożeniu dają one wierzchołki innego czternastościanu (205) złożonego, jak pierw-

(205)





(206)

szy, z 6 kwadratów i 8 trójkątów równobocznych. Gdy go przetniemy płaszczyzną przechodzącą przez 6 krawędzi i obrócimy jedną połowę o 60^0 względem drugiej, a potem skleimy połowy, otrzymamy znowu kubooktaedr.

Teraz wyobraźmy sobie, że kule są z drożdży i rosną jednakowo. Luki między nimi wypełnią się i każda kula zamieni się na wielościan opisany na kuli, z której powstał. Z pierwszego ułożenia wyjdą dwunastościany rombowe rysunków (171) i (172), a z drugiego bryły (206) ograniczone przez 6 rombów i 6 trapezów.

Można otrzymać dwunastościan rombowy z bryły (206) przecinając ją wzdłuż równika (czarna linia) i obracając górną połowę o 60^0 dokoła pionowej osi. Z tego wynika, że bryły te mają tę samą objętość, tę samą powierzchnię, tego samego rodzaju naroża i w tej samej liczbie, a ich ściany mają odpowiednio te same po-

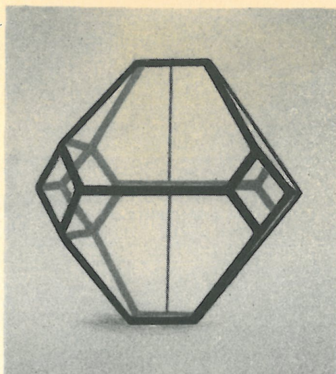
la, te same obwody i te same kąty. Także kąty dwuścienne są te same.

Pierwsze ułożenie kul uczy, że kubooktaedr można wpisać w dwunastościan rombowy; drugie ułożenie daje analogiczny wynik. (Jaki?).

Widzieliśmy, jak można wypełnić przestrzeń dwunastościanami rombowymi; można ją wypełnić też bryłami (206), jak uczy eksperyment z drożdżami.

Komórki plastra pszczelnego można otrzymać ściskając dwiema deskami dwie warstwy kul ułożonych na sobie najgęściej. Stąd powstaną dwie warstwy sześciobocznych graniastosłupów sklepionych daszkami złożonymi z trzech rombów; daszki jednej warstwy będą także daszkami drugiej. Możemy więc wytłumaczyć kształt plastra pszczelnego przez działanie kul elastycznych; w tym przypadku kulami są głowy pszczół, pokrywające najgęściej obie strony cienkiej płyty woskowej.

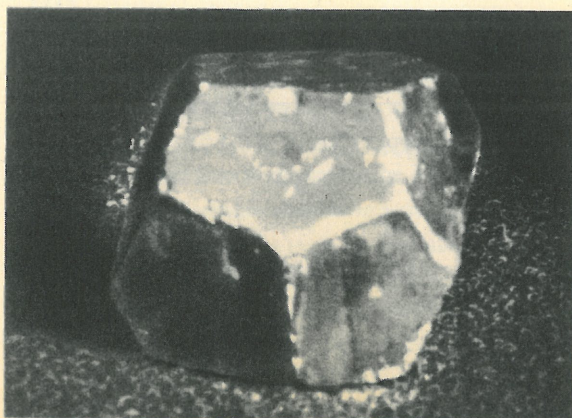
Można zapytać, które wypełnienie przestrzeni jest lepsze: czy dwunastościanami (171), (172), czy czternastościanami semiregularnymi (178), (179). Chodzi o to, który sposób jest ekonomiczniejszy, to znaczy wymaga mniej materiału na ściany. Otóż drugi sposób (który nazwaliśmy najprostszym) jest o blisko 6 pro mille tańszy. Innymi słowy, gdy takie bryły mają tę samą objętość, czternastościan ma powierzchnię mniejszą od powierzchni dwunastościanu o (mniej więcej) sześć tysiącznych owej powierzchni. Jest bardzo ciekawe, że widać tę nieznaczną różnicę na oko: widać mianowicie, że czternastościan bardziej się zbliża do kuli, która jest najekonomiczniejsza, o czym później powiemy.

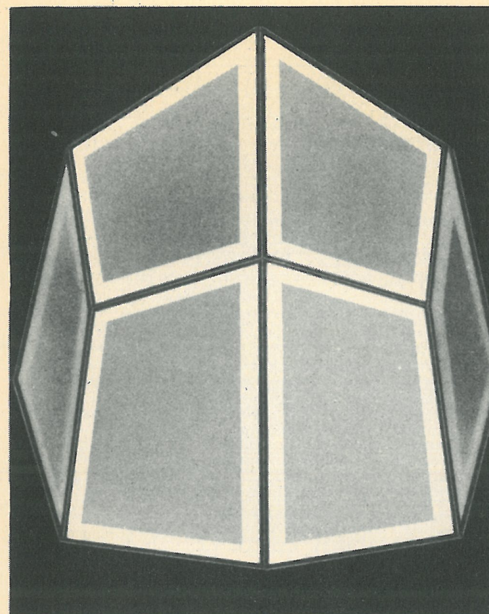


(207)

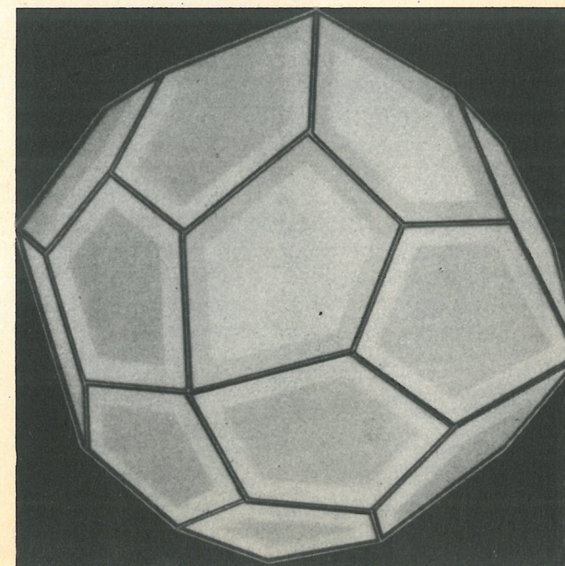
Kryształ fluorytu $CaFe_2$ (207) przypomina czternastościan semiregularny, ową rozdętą cegłę z rysunku (178). Kryształ pirytu FeS_2 (208) jest podobny do dwunastościanu foremnego, inne zaś minerały krystalizują się w ciekawych formach nieregularnych: kryształ sfalerytu ZnS (209) ma 12 ścian, które są przystającymi deltoidami, a kupryt Cu_2O (210) przybiera kształt dwudziestoczterościanu ograniczonego nieregularnymi pięciobokami.

(208)

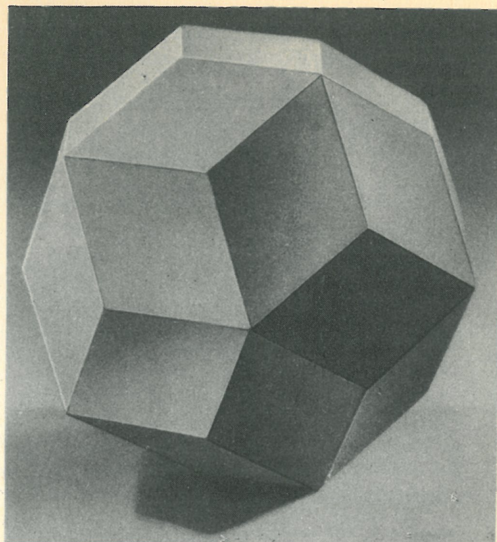




(209)

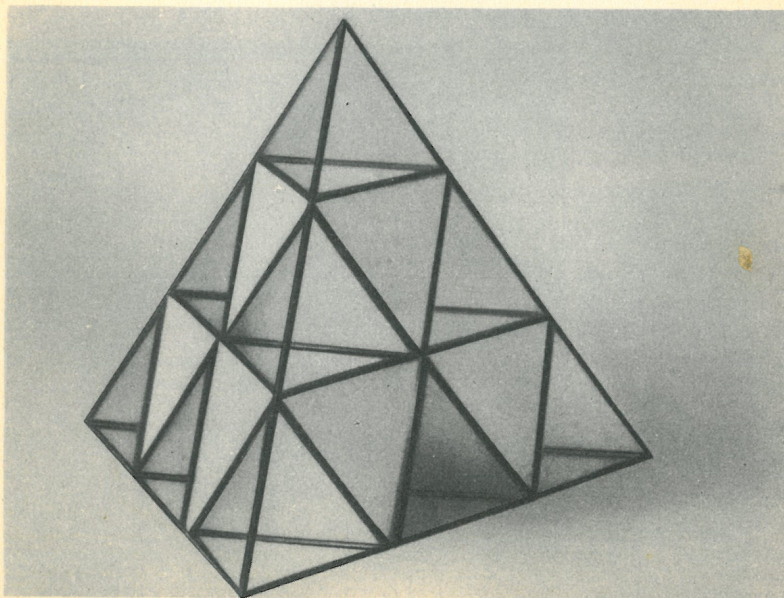


(210)



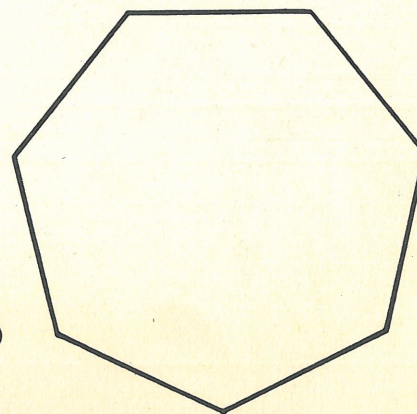
(211)

(212)

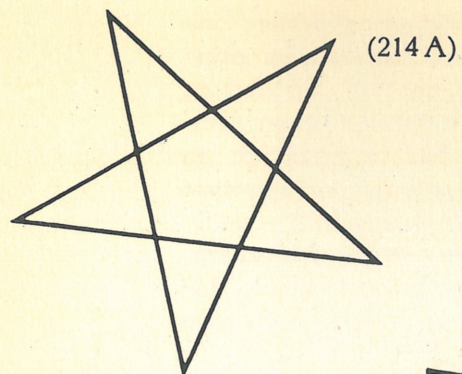


Gdy przeprowadzimy płaszczyznę przez każdą krawędź dwunastościanu foremnego prostopadle do płaszczyzny symetrii, w której ta krawędź leży, powstanie trzydziestościan rombowy (211). Przekątne ścian rombowych są krawędziami regularnych wielościanów: krótsze dają dwunastościan, dłuższe krawędzie — dwudziestościan. Postępując z trzydziestościanem, tak jak przed chwilą z dwunastościanem, dostaniemy sześćdziesięciościan. (Jakie będą jego ściany?).

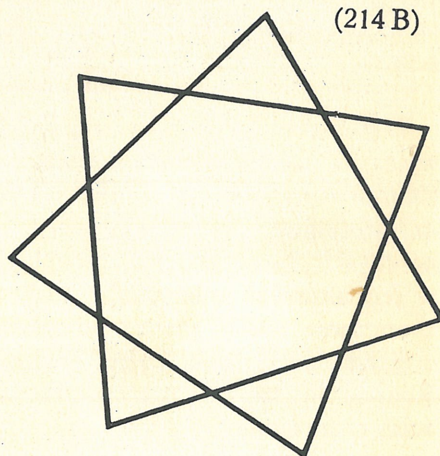
Zagadnienie wyborów proporcjonalnych, rozwiązane dla trzech partyj za pomocą trójkąta (53) prowadzi w przypadku czterech partyj do czworościanu foremnego (212) podzielonego na części płaszczyznami równoległymi do ścian w jednakowych odstępach. Gdy użyjemy nieskończenie wielu równo odległych płaszczyzn o tychże kierunkach, wypełnimy całą przestrzeń. Rozpadnie się ona na ośmiościany i czworościany foremne.



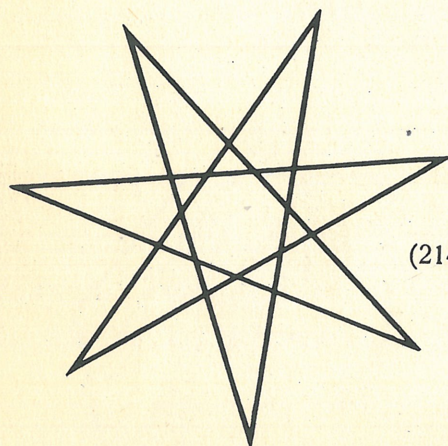
(213)



(214 A)



(214 B)

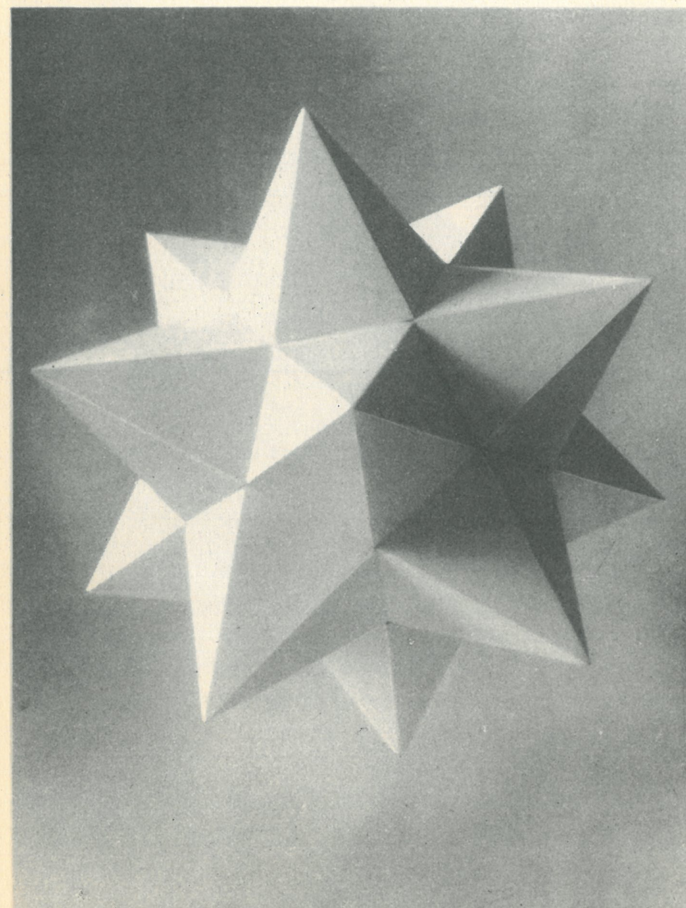


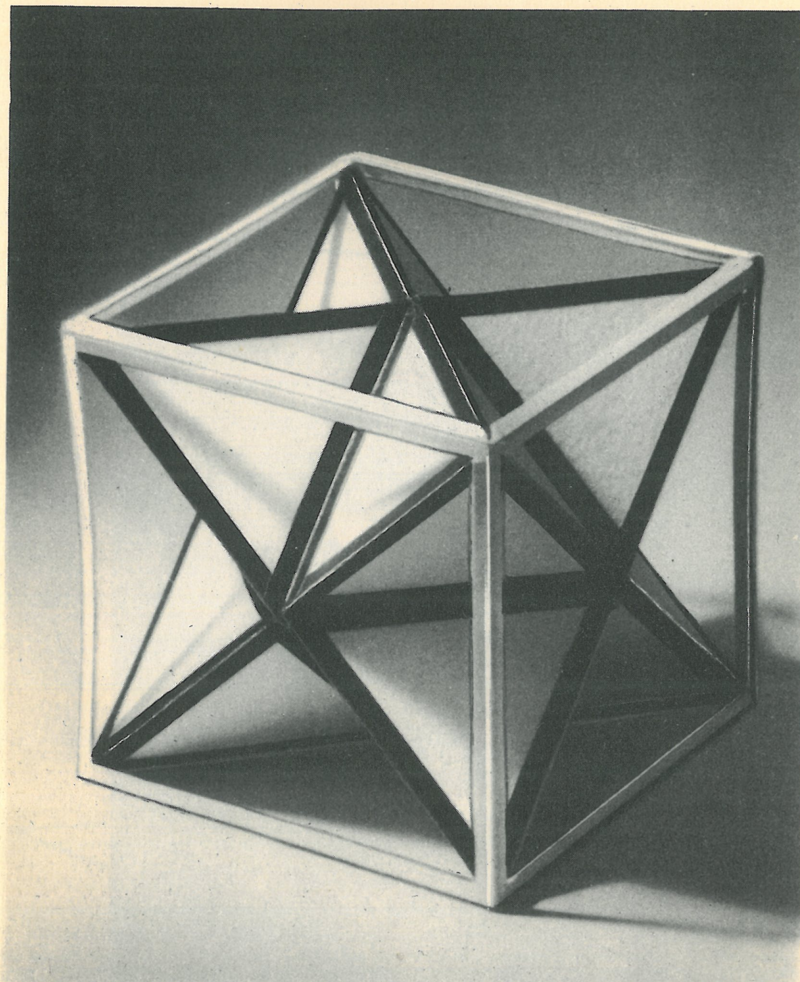
(214 C)

Prócz zwykłych wieloboków foremnych są jeszcze gwiaździste (213, 214 A, B, C). Pięciobok gwiaździsty, *pentagramma mysticum*, jest ulubionym rysunkiem astrologów i czarodziei. Są trzy siedmioboki foremne: jeden zwykły i dwa gwiaździste.

Ta fotografia (215) daje wyobrażenie, jak wygląda wielościan ograniczony 12 gwiaździstymi pięciobokami.

(215)





(216)

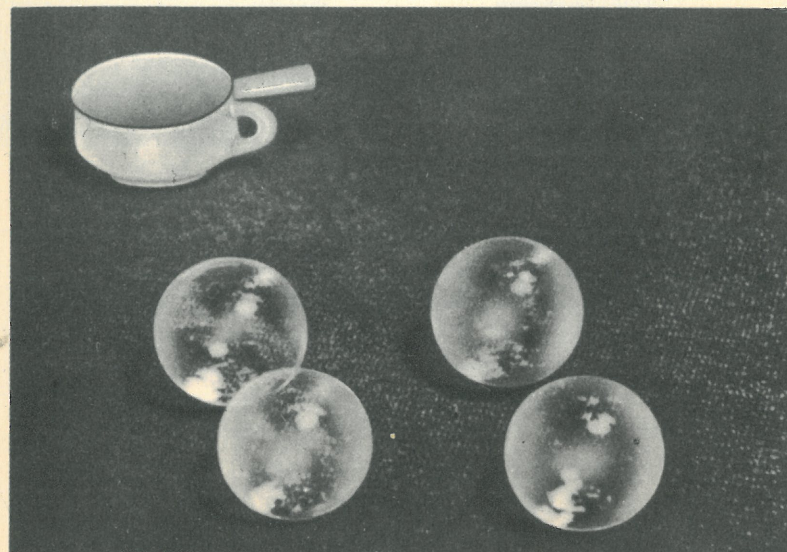
Możemy wybrać cztery naroża sześcianu na naroża czworościanu foremnego. Można to zrobić dwojako (216), a oba czworościany razem dadzą ośmiościan gwiaździsty.

IX

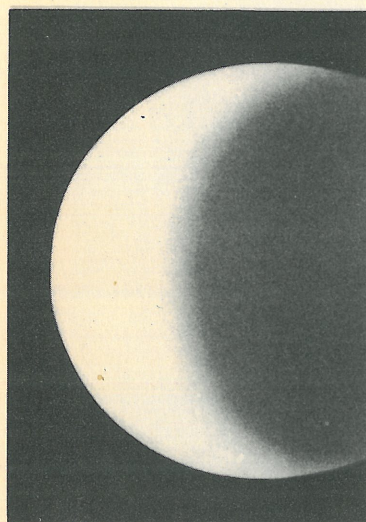
BAŃKI MYDLANE
ZIEMIA I KSIĘŻYC
MAPY I DATY

Najłatwiej otrzymać kulę wydmuchując bańkę mydlaną (217). Napięcie powierzchniowe błonki mydlanej stara się zmniejszyć powierzchnię błonki. Bańka zamyka pewną ilość powietrza, więc błona przybiera taki kształt, który przy danej objętości ma najmniejszą powierzchnię; kula jest jedyną bryłą o tej własności.

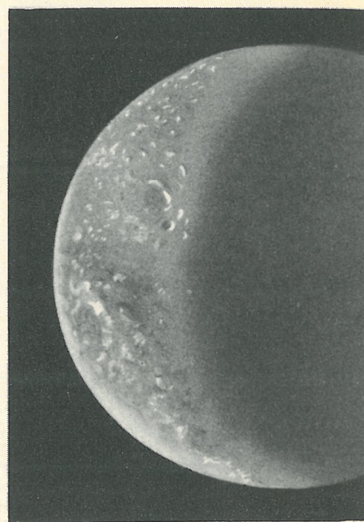
(217)



Księżyc był niegdyś ciekłą kulą. Ponieważ każda kropla ciekłej masy przyciągała każdą inną kroplę, cząsteczki cieczy ustawiły się w taki sposób, by każda zmiana kształtu wymagała pracy. Można wykazać matematycznie, że kształt sferyczny (to znaczy kulisty) ma tę własność. Fotografie (218 A, B) przedstawiają balon oświetlony z boku i Księżyc.

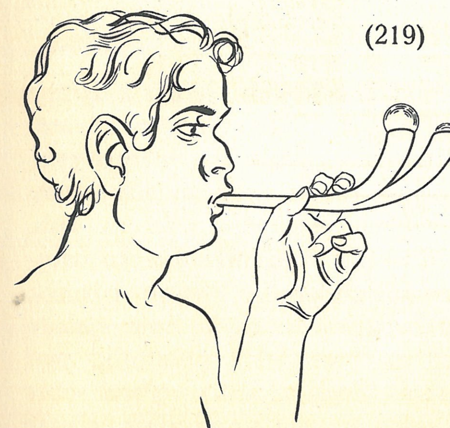


(218 A)

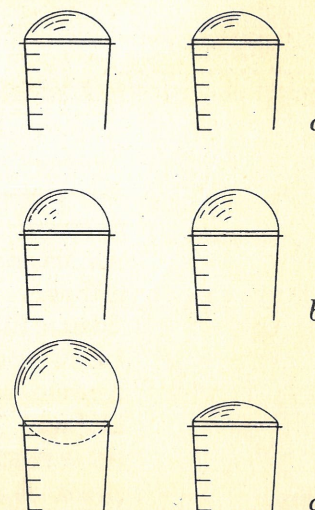


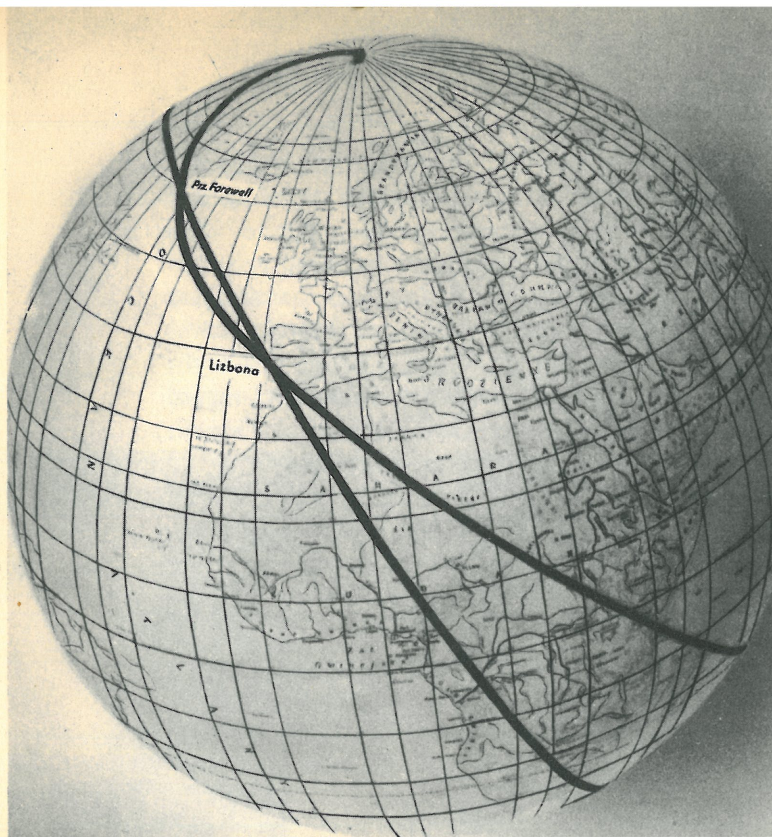
(218 B)

Gdy do wydmuchiwania baniek mydlanych użyjemy fajki z dwoma otworami, to pojawią się na nich (219) dwie czapeczki z mydlanej błonki (a), które będą rosły równo, aż osiągną kształt półkulisty. Wtedy stanie się coś dziwnego: jedna bańka będzie rosła dalej, a druga będzie malała. Przyczyną tego jest własność kuli, o której mówiliśmy przed chwilą: kula ma najmniejszą powierzchnię przy danej objętości. Gdy pewna ilość powietrza została już wdmuchana w fajkę, natura ma rozwiązać zadanie umieszczenia nadwyżki powietrza nie mieszczącej się w rurkach — wewnątrz powierzchni możliwie małej, z tym warunkiem, że obie bańki mają być przyczepione do okrągłych wylotów. To jest to samo zadanie, co zamknięcie danej ilości powietrza wewnątrz błony, której jedna część jest nad wylotem, a druga pod nim, bo (c) możemy zawsze złożyć dwie bańki razem bez zmiany ich powierzchni i objętości. Dopóki nadwyżka powietrza jest za mała, by wypełnić kulę, której równikiem jest brzeg wylotu fajki, dopóty (a) rozwiązaniem jest symetryczna soczewka. Ta soczewka urasta (b) do sfery, a od tej chwili już zawsze istnieje sfera oparta o wylot i wystarczająca na daną ilość powietrza. Widzimy ją na rysunku (c) z dolną częścią zaznaczoną kreskowanym łukiem; gdy tę dolną część przeniesiemy na drugi wylot, zobaczymy, dlaczego druga bańka maleje. (Dlaczego?).



(219)





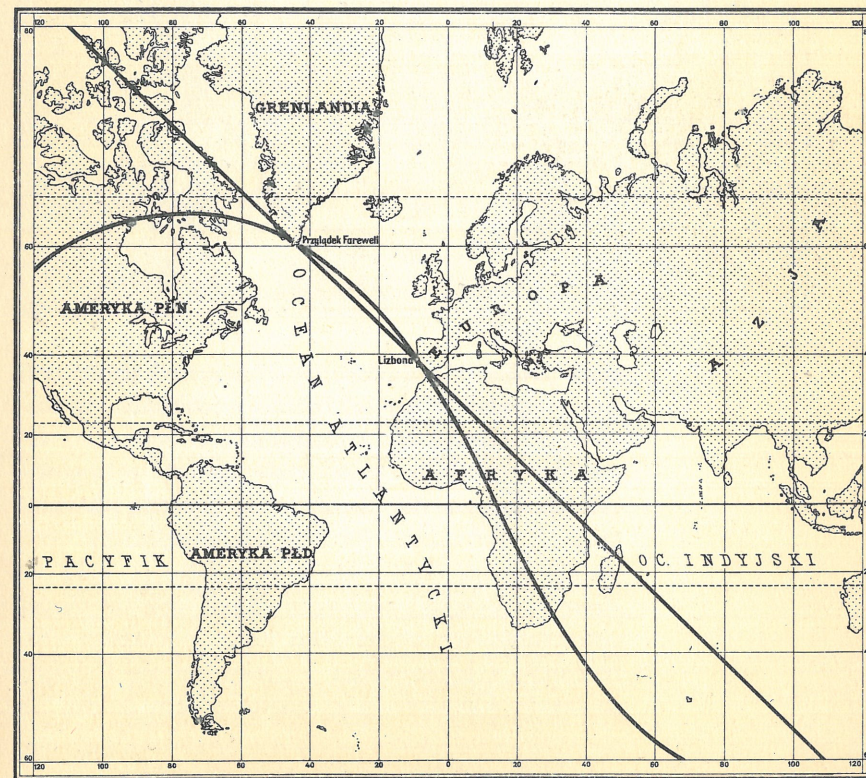
(220)

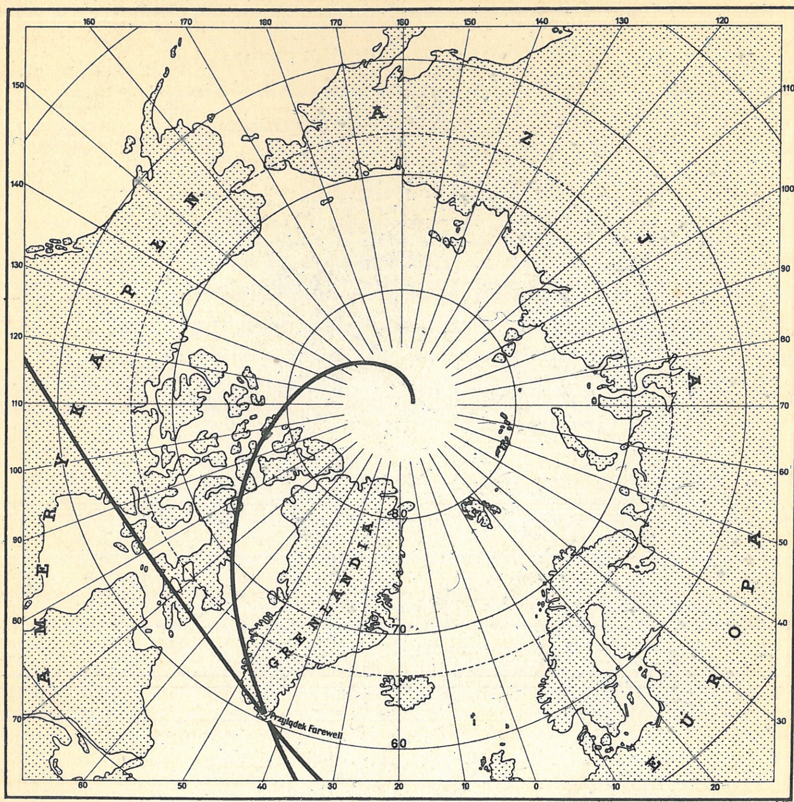
Ziemia (220) ma kształt kuli. Jedna z dwóch czarnych linij łączących Lizbonę z Przylądkiem Farewell (na fotografii wyszła ona niemal prosto) przedstawia najkrótszą drogę między tymi portami. Jest to łuk wielkiego koła na kuli, tak zwana *ortodroma*. Południki też są ortodromami, z równoleżników — tylko równik. Druga linia to *loksodroma*, czyli linia stałego kursu; przecina ona wszystkie południki pod tym samym kątem. Żeglarz, który wybrał sobie kierunek na busoli i trzyma się go stale, płynie po loksodromie. Sterowanie okrętem staje się przez to łatwiejsze, ale podróż się przedłuża.

Widzimy, że loksodroma w swoim dalszym biegu zawija się spiralnie dokoła bieguna i nie nadaje się wcale na rejs badacza mórz podbiegunowych.

Rzut Mercatora (221) jest to mapa oddająca wiernie kąty; południki i równoleżniki tworzą na tej mapie prostokątną siatkę, a loksodromy są proste. Każda z nich bowiem przecina wszystkie południki pod tym samym kątem na Ziemi, a więc na mapie wiernokątnej także. Ponieważ południki są na mapie Mercatora liniami równoległymi, więc loksodroma prze-

(221)



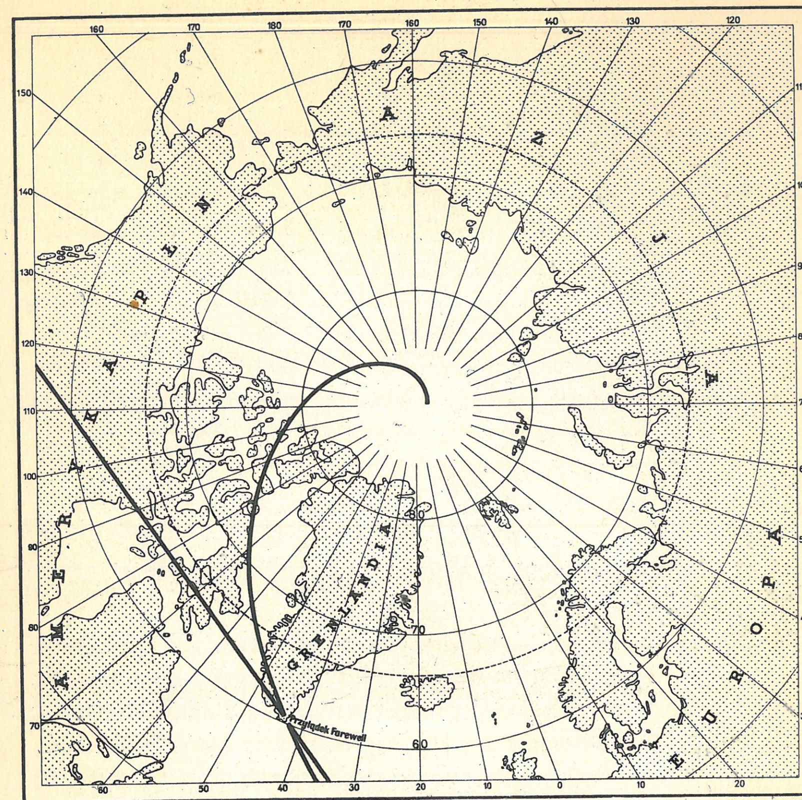


(222)

cina proste równoległe pod stałym kątem, jest zatem prostą. Ortodroma, przeciwnie, wykazuje przegięcie jak sinusoida *.

Gdy rzutujemy powierzchnię kuli z bieguna południowego na płaszczyznę styczną do bieguna północnego (rzut stereograficzny), powstaje mapa (222), która przedstawia koła na Ziemi jako koła i zachowuje kąty. Na tej mapie ortodroma wychodzi jako koło (o dużym promieniu), a loksodroma — jako spirala logarytmiczna. Ostatnie jest następstwem faktu, że

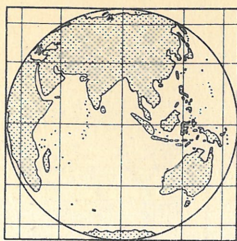
* Porównaj (221).



(223)

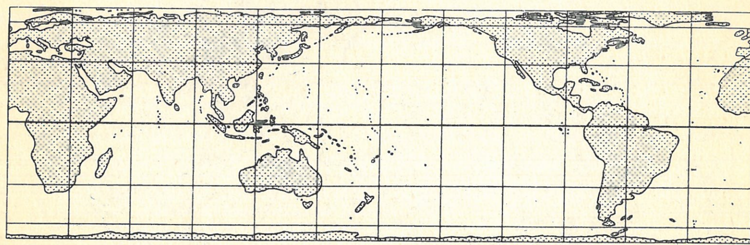
na mapie południki są prostymi przecinającymi się w biegunie, a loksodroma przecina je pod stałym kątem. Gdybyśmy z antypody Warszawy wykonali projekcję globu na płaszczyznę styczną do niego w Warszawie, to południki i równoleżniki dałyby rysunek (223).

Gdy środkiem rzutowania (223) jest środek Ziemi, a płaszczyzną rzutu jest styczna w biegunie północnym (rzut gnomoniczny), ortodroma przejdzie w prostą. Dlatego taka mapa jest odpowiednia do lotów w okolicach arktycznych.



(224 A)

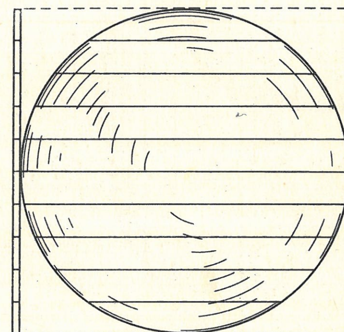
(224 B)



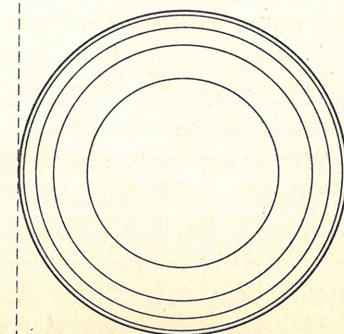
Gdy umieścimy glob w walcu (224 A), który go dotyka na równiku i rzucimy go na walec, przedłużając płaszczyzny równoleżnikowe aż do przecięcia z walcem i robiąc to samo z płaszczyznami południkowymi, otrzymamy (224 B) mapę globu na walcu. Rozcinając walec i rozkładając płasko, dostaniemy mapę ziemską o prostych i wzajemnie prostopadłych południkach i równoleżnikach. Ta mapa ma własność osobliwą (znaną już Archimedesowi), że zachowuje pola. Gdyby glob był pokryty jednostajną warstwą farby lub gliny i gdybyśmy każdą cząstkę tego pokrycia przenieśli na właściwe miejsce na mapę na walcu, to znaczy ruchem wzdłuż linij poziomych (224 A), materia pokrywałaby walec jednostajnie; gdy ruchem powrotnym przeniesiemy ją aż na wspólną oś walca i kuli, to ta oś zostanie jednostajnie pokryta. Mogliśmy to zrobić od razu, bez walca pomocniczego.

Ale możemy to zrobić jeszcze inaczej, w dwóch krokach: naprzód rzutujemy całą materię prostopadle na płaszczyznę równika (225 A), tak jak gdyby każda cząstka spadała lub wznosiła się do tej płaszczyzny, a potem rzutujemy to płaskie rozmieszczenie masy na równiku (225 B) prostopadle na jego średnicę — i oczywiście znowu otrzymujemy rozmieszczenie jednostajne (225 C). Tym sposobem znaleźliśmy takie rozmieszczenie masy na tarczy kołowej, które daje, rzucone na dowolną średnicę tarczy, rozmieszczenie jednostajne. Jest tylko jedno takie rozmieszczenie.

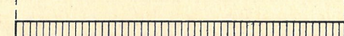
(225 A)

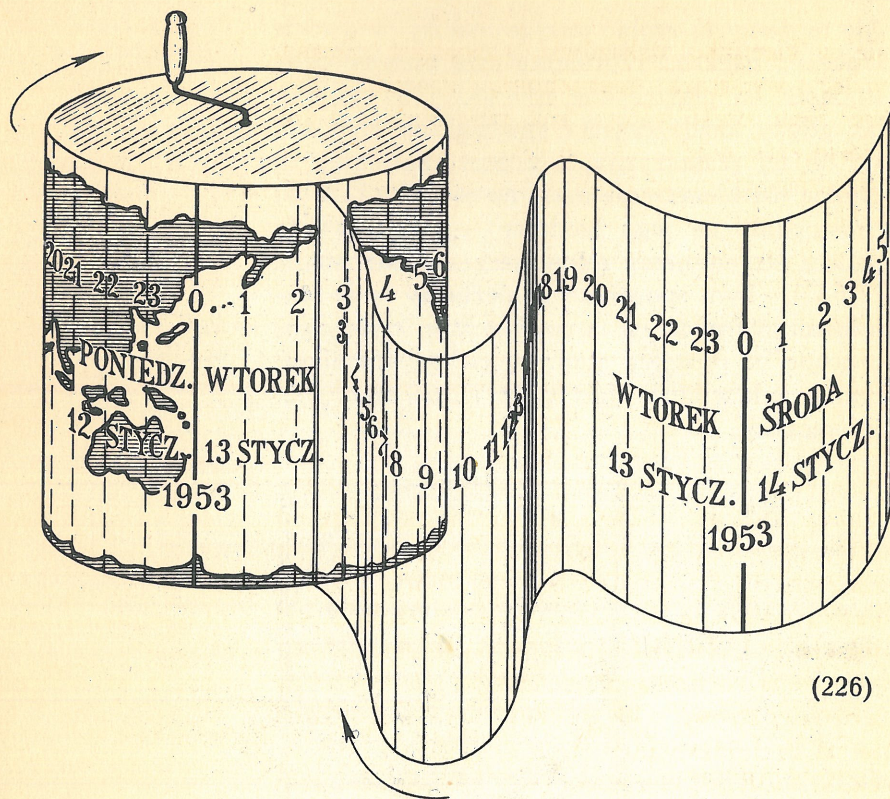


(225 B)



(225 C)





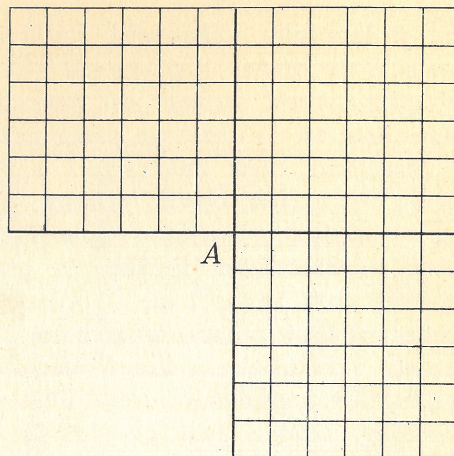
(226)

Aby wytłumaczyć paradoks daty na naszej Ziemi, wyobraźmy sobie, że mapa (224 B) jest narysowana na przeźroczystej kalce i że ją z powrotem naklejamy na walec, z którego powstała. Ten walec jest ze szkła i jest nieruchomy. Jeden z południków dzielących Azję od Ameryki i przecinających Ocean Spokojny będzie linią daty (226). Kalendarz jest wstęgą papierową, która wchodzi przez szczelinę wyciętą wzdłuż linii daty pod szkło i nawija się na niewidoczny walec drewniany, obracający

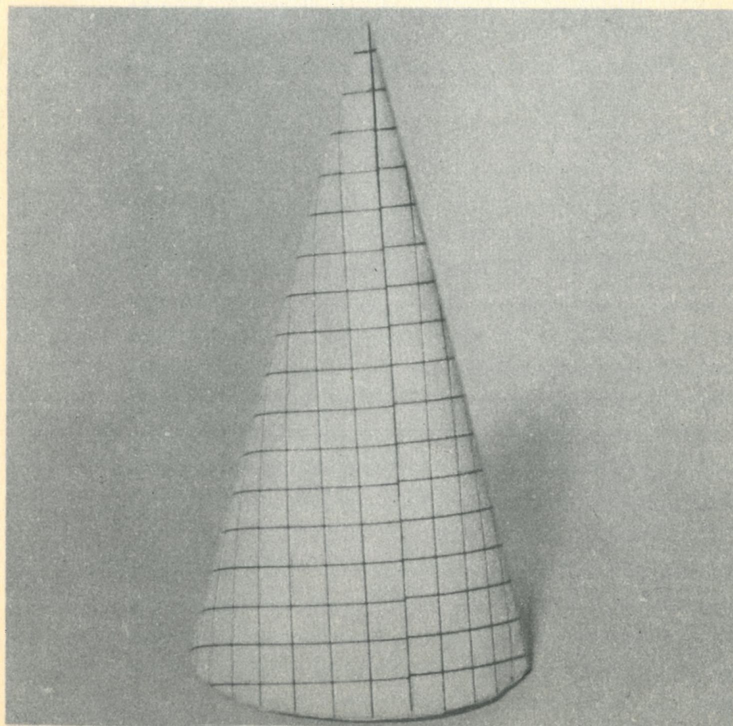
się w kierunku wskazówki, natomiast szklany walec wyobraża nieruchomą Ziemię. Zewnętrzna część wstęgi jest przyszłością, a już nawinięte zwoje i zakryte przez następne — są przeszłością; część nawinięta i widoczna przez szkło — to jest chwila obecna. Na wstędze są wypisane dni, miesiące i lata. Dni są podzielone poprzecznymi liniami na godziny. Ponieważ data zmienia się o północy, więc poprzeczne linie oznaczone godziną 0 na wstędze czasu, kreskowane i kropkowane na rysunku (226), są też granicami daty. Dlatego na Ziemi widzimy zawsze dwie granice daty: stałą granicę daty i ruchomą linię północy. Tu na rysunku widzimy WTOREK rozciągający się od stałej granicy daty aż do ruchomej, która jest na zachód od stałej (przecina w momencie rysunku północną Japonię). Dalej na zachód jest jeszcze PONIEDZIAŁEK, który obejmuje cały obszar za ruchomą granicą aż do stałej granicy z drugiej strony. Gdy ruchoma granica wędruje na zachód wskutek obrotu drewnianego walca, WTOREK wzmaga swój obszar kosztem PONIEDZIAŁKU, który się kurczy. W końcu przychodzi chwila, gdy WTOREK panuje nad całym globem. Ale jest to tylko jeden moment, bo nadchodzi ŚRODA — i linia północy opuszcza stałą linię daty dążąc na zachód i stwarzając między sobą i granicą wąski pasek na nowy dzień. Zaczyna się upadek WTORKU i gra powtarza się dalej.

Gdyby Ziemia była walcem, to można by na niej rozmieścić koła równoleżnikowe i prostopadłe do nich proste południkowe. Wyobraźmy sobie, że są one widoczne na owej walcowej

(227)

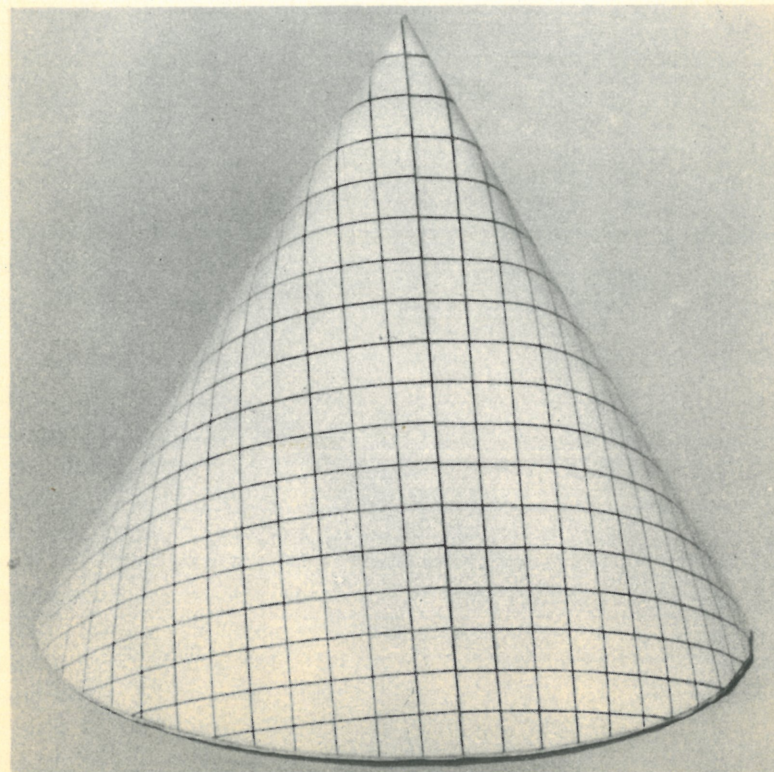


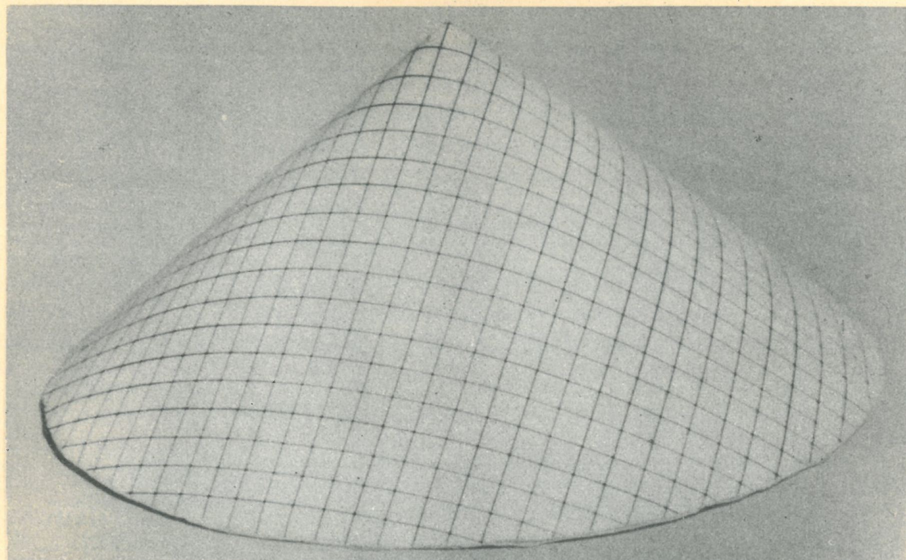
(228)



planecie, na lądzie i na morzu. Nawigacja będzie ułatwiona, bo — jak już widzieliśmy — najkrótsze linie na walcu są śrubowe i przecinają równoleżniki i południki pod stałym kątem. Na Ziemi kulistej nie można narysować takiej siatki orientacyjnej, którą by każda ortodroma (czyli wielkie koło) przecinała pod stałym kątem. Ale są inne bryły, prócz walca, na których taka ulepszona siatka jest możliwa. Jak wiemy, stożek można rozciąć i rozwinąć na płaszczyźnie; na niej najkrótsze linie są proste.

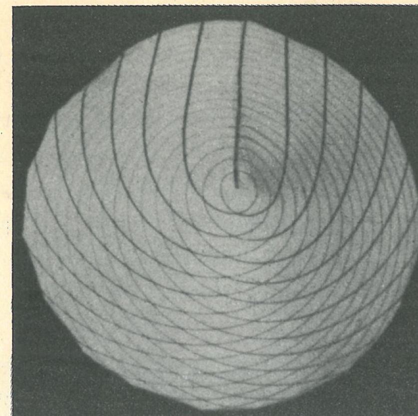
(229)





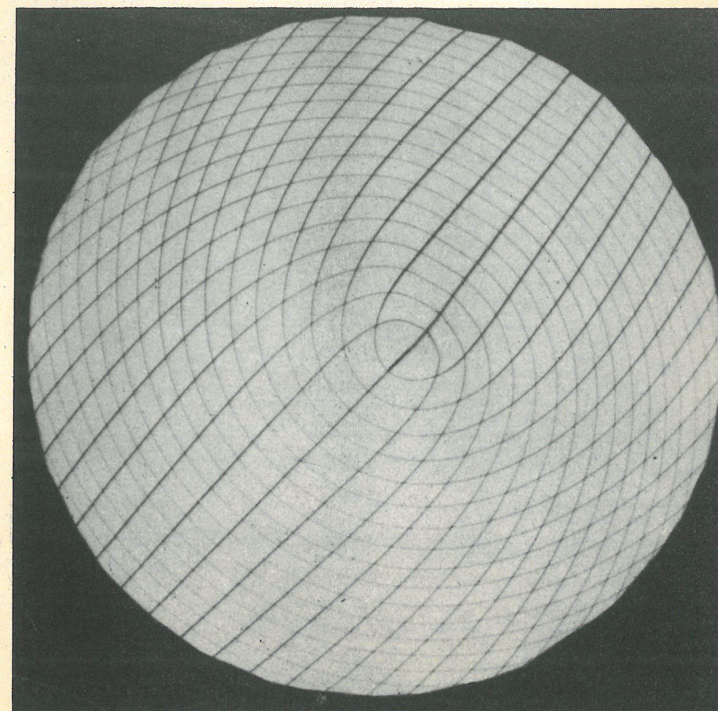
(230)

Otóż na płaszczyźnie zwyczajna siatka kwadratowa, jak na rysunku (11), ma własność, że każda prosta przecina południki pod stałym kątem i równoleżniki pod stałym kątem. Jeżeli uda się nam zwinąć tę siatkę wraz z płaszczyzną w stożek, zadanie będzie rozwiązane. Ale tu jest trudność, bo chcąc nadać siatce gładki przebieg musimy odpowiednio ją obciąć przed zwinięciem, a mianowicie wzdłuż jej własnych linij. Za kąt przy wierzchołku *A* (227) możemy wziąć 90⁰, 180⁰ lub 270⁰. Powstaną trzy różne stożki. Pierwszy (228) ma siatkę z jednej gromady „ników", każdy „nik" przecina każdy inny (i siebie też) raz i tylko raz. Drugi stożek (229) ma siatkę z równoleżników i południków; każdy równoleżnik przecina każdy południk raz i tylko raz. Trzeci



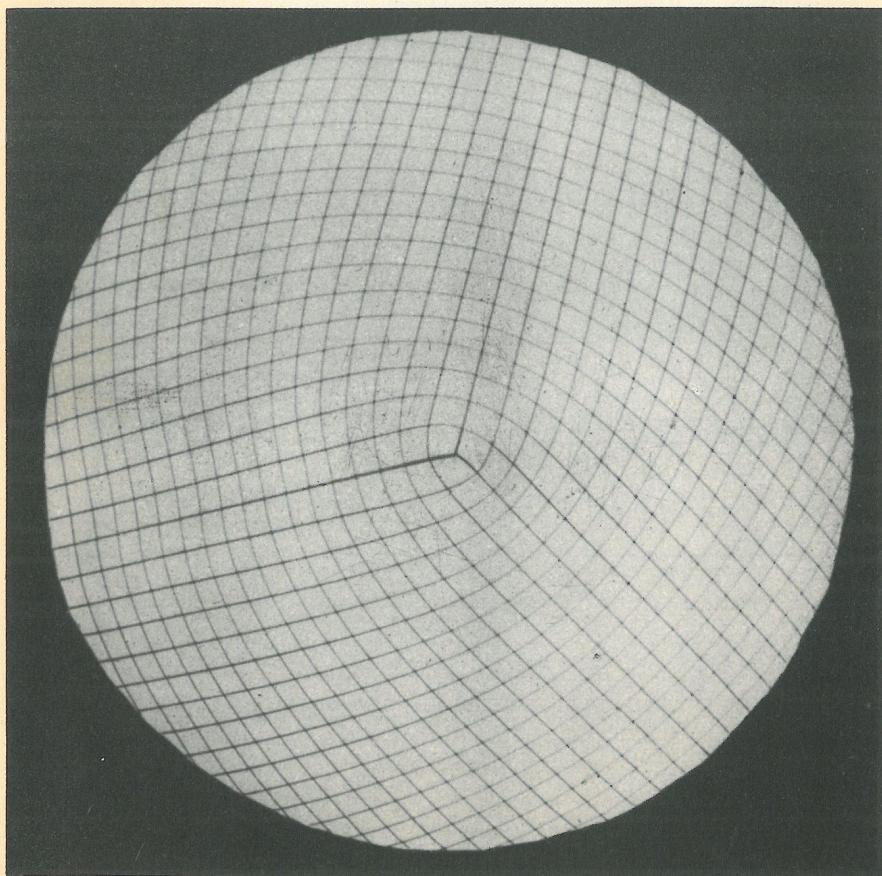
(231)

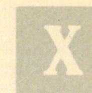
(232)



stożek (230) ma siatkę z trzech gromad; można by je nazwać równoleżnikami, południkami i łącznikami. Każda gromada przecina obie inne i przez każdy punkt stożka przechodzą linie dwóch gromad. Jak się krzyżują linie siatek na stożkach, widać na fotografiach stożków (231, 232, 233) zwróconych ostrzem ku obiektywowi.

(233)

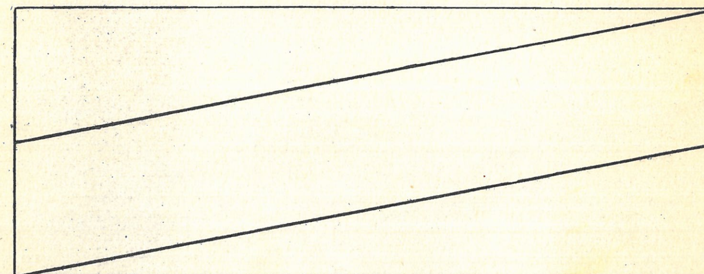




WIEWIÓRKI
ŚRUBY
ŚWIECE
CIENIE
AKORDY

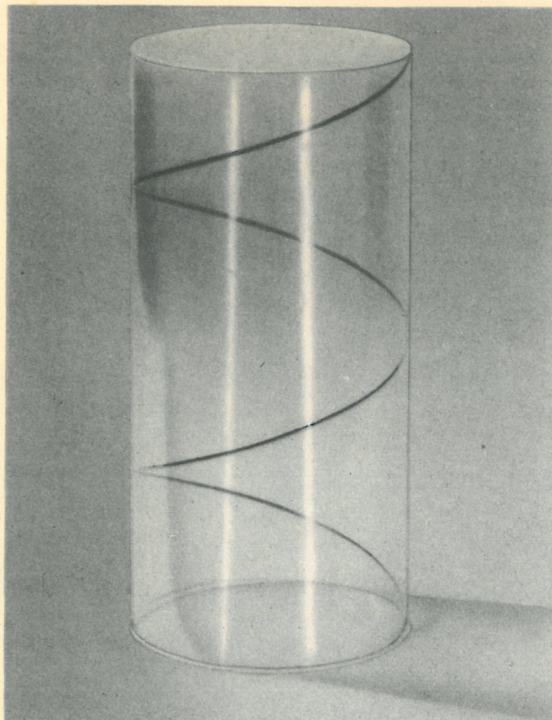
Zabawnie wyglądają wiewiórki ścigające się dookoła drzewa. Ich drogi są liniami śrubowymi. Rzeczywiście, aby znaleźć najkrótszą drogę na walcu, możemy rozciąć go wzdłuż prostej (234) i rozłożyć płasko, jak mapę (224 B).

(234)

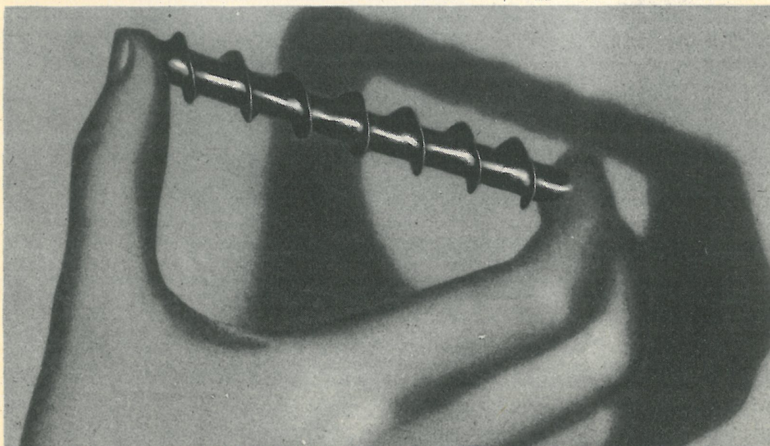


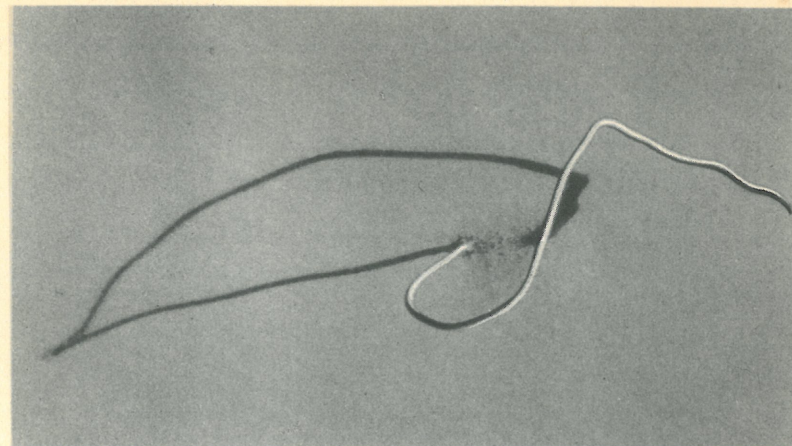
Najkrótsza droga między dwoma punktami (którymikolwiek) będzie teraz prostą, ta prosta, zwinięta wraz z całą powierzchnią, zmienia się w linię śrubową (235). Rzut śruby (236) wykazuje ostrza w niektórych punktach. Jest to własność każdej linii wichrowatej, że można

(235)



(236)

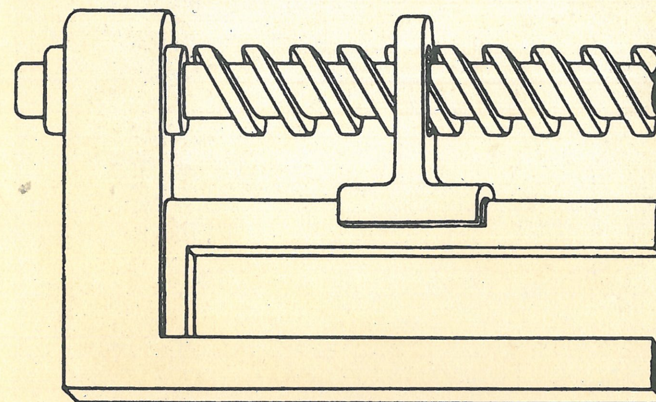




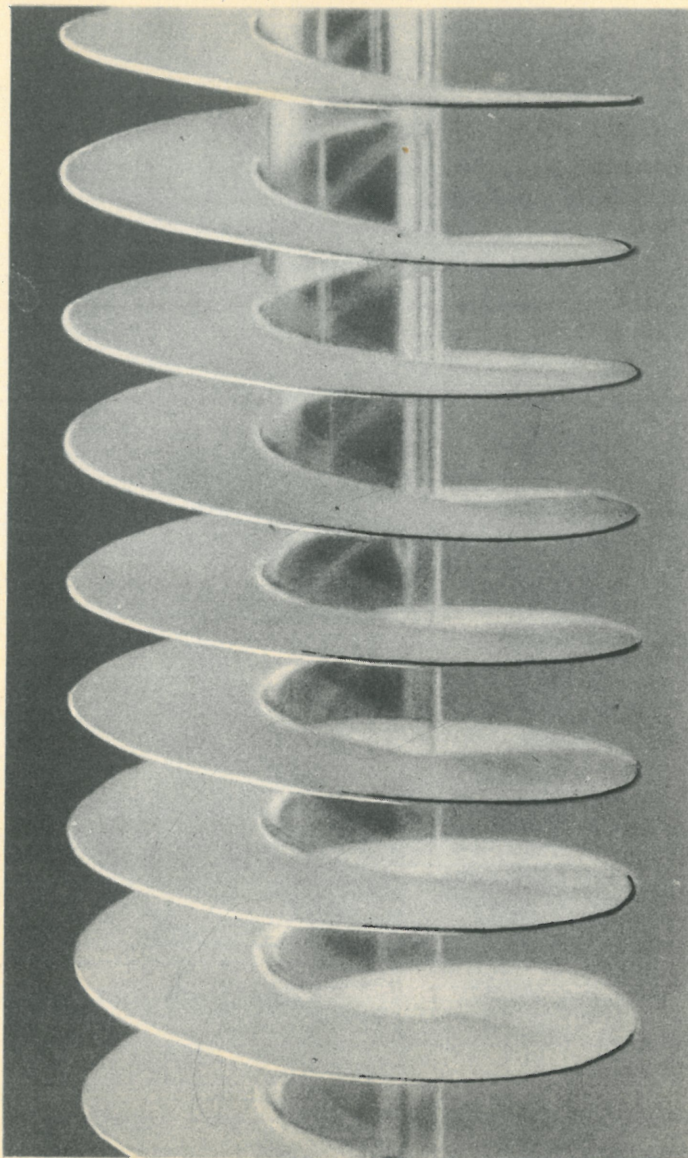
(237)

przez odpowiedni rzut (237) otrzymać z każdego punktu ostrze. Zwykła śruba ma za krawędź linię śrubową. Tak zwana śruba bez końca (238) zamienia jednostajny ruch obrotowy na jednostajny postępowy.

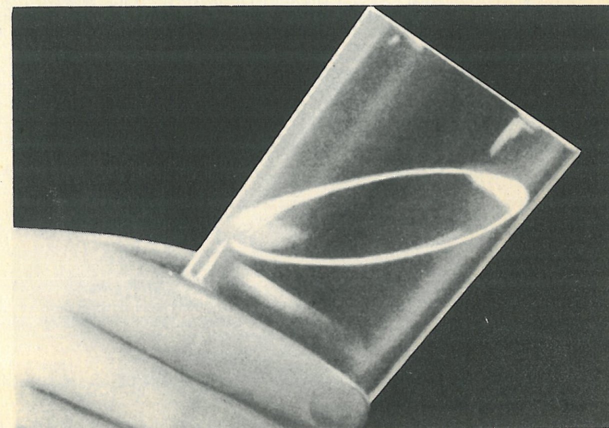
(238)



(239)



Gdy odcinek o stałej długości ślizga się jednym końcem po linii śrubowej a drugim po jej osi, powstaje powierzchnia śrubowa (239). Można ją otrzymać obracając dookoła pręta ruchem jednostajnym ramię przytwierdzone prostopadle do tego pręta i posuwając równocześnie pręt ruchem jednostajnym wzdłuż niego samego. Jest to jedyna powierzchnia nieobrotowa, która może się ślizgać sama po sobie. Sfera, walec i płaszczyzna są powierzchniami obrotowymi; nie tylko mogą się ślizgać po sobie, ale mogą tym ruchem doprowadzić dowolny punkt do dowolnego położenia, i to po dowolnie przepisanej drodze. Z tego to powodu cztery wyżej wymienione powierzchnie zawsze będą odgrywały główną rolę w budowie maszyn.

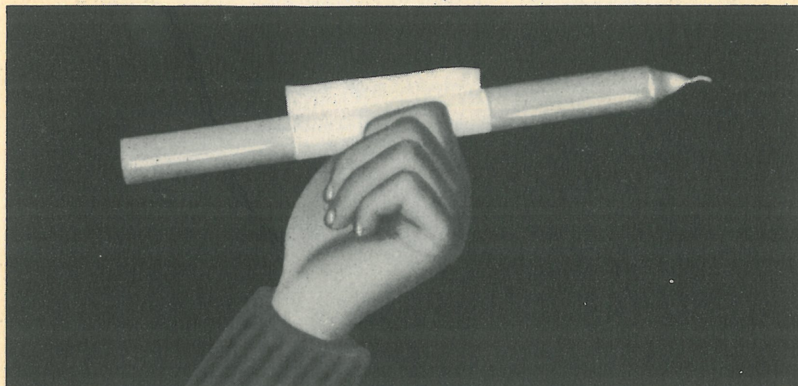


(240)

Gdy przetniemy walec płaszczyzną, otrzymamy elipsę (240). Błędne byłoby mniemanie,

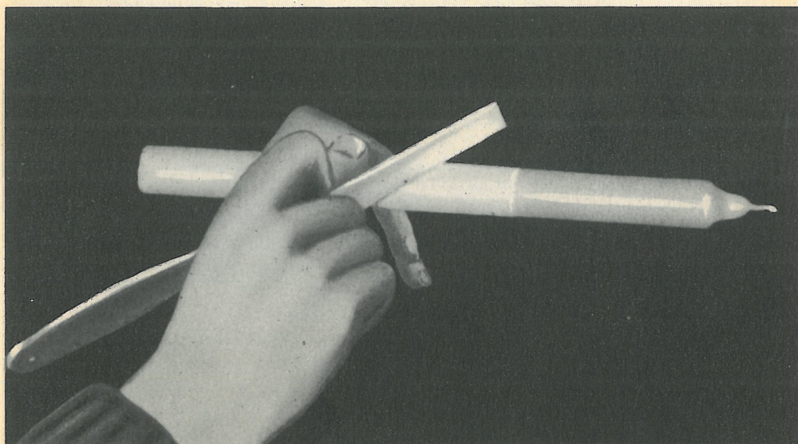
że elipsa, jako krzywa płaska, jest najkrótszą drogą na walcu.

Gdy nawiniemy papier na świecę (241), potem przetniemy świecę ukośnie (242) ostrym nożem (243) i rozwiniemy papier, otrzymamy (244) sinusoidę.



(241)

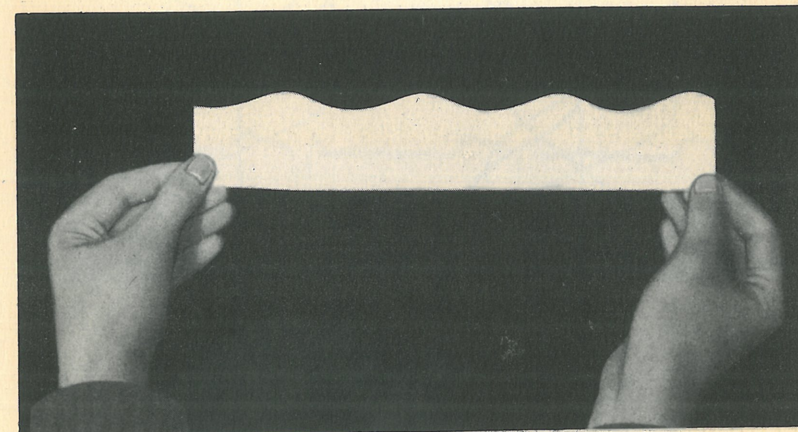
(242)



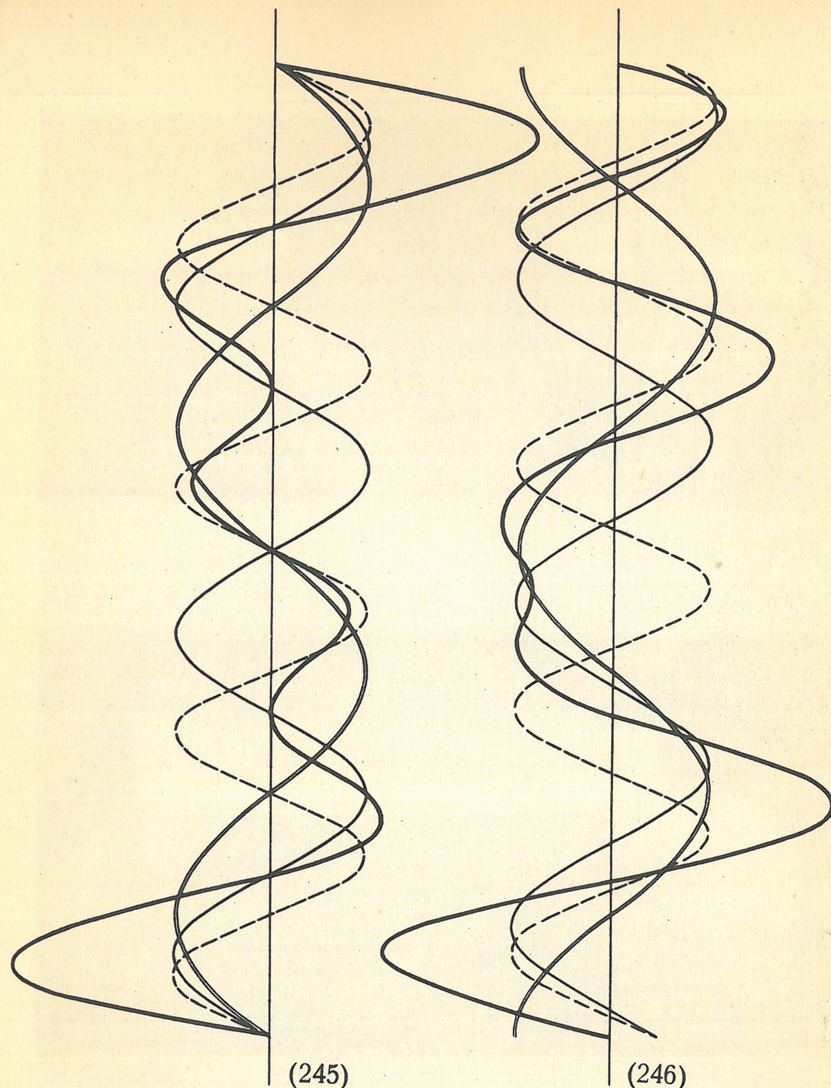


(243)

(244)



Każdą krzywą można otrzymać przez dodawanie sinusoid. Linie, którę rysuje na płycie gramofonu igła, gdy zapisuje jeden czysty ton, stają się, po rozłożeniu walca gramofonowego na płaszczyźnie, sinusoidami. Oto trzy sinusoidy (245) o jednakowych amplitudach, to znaczy o jednakowych wahaniach od osi; odpowiadają



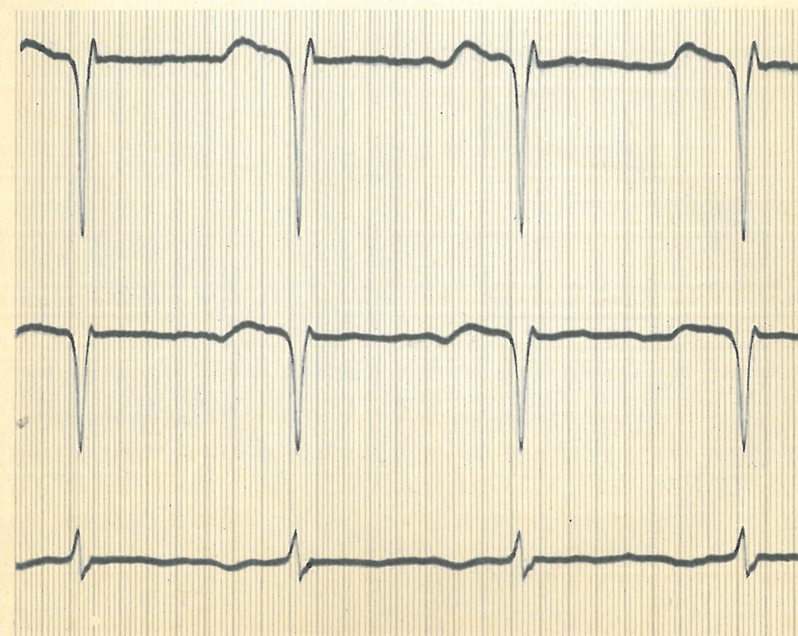
(245) (246)

one trzem składowym tonom akordu: wysokie $c - g - c$. Gruba linia jest sumą tych sinusoid; tę sumę rysuje igła zapisując ów akord na płycie gramofonu. Ale ten sam akord może innym razem dać inną linię (246). Widać na rysunku, że tym razem trzy składowe drgania już nie startują równocześnie. Ponieważ nasz

słuch chwyta tylko intensywność dźwięku, która zależy tylko od amplitudy, oraz wysokość i barwę dźwięku, które zależą tylko od częstości drgań składowych, ale nie chwyta szczytów i dolin fal drgania złożonego, więc jest widoczne, że musi być w uchu aparat rozkładający falę głosową z powrotem na sinusoidy; rzeczywiście, jest taki aparat, zwany organem Cortiego. Do mózgu dochodzi wprawdzie wrażenie złożone, ale to składanie jest czymś innym jak dodawaniem sinusoid i zatraca niektóre cechy geometrycznego obrazu, jakie ujawnia walec gramofonowy.

Elektrokardiogram (247) pokazuje elektryczne wibracje układu nerwowego odpowiadające pe-

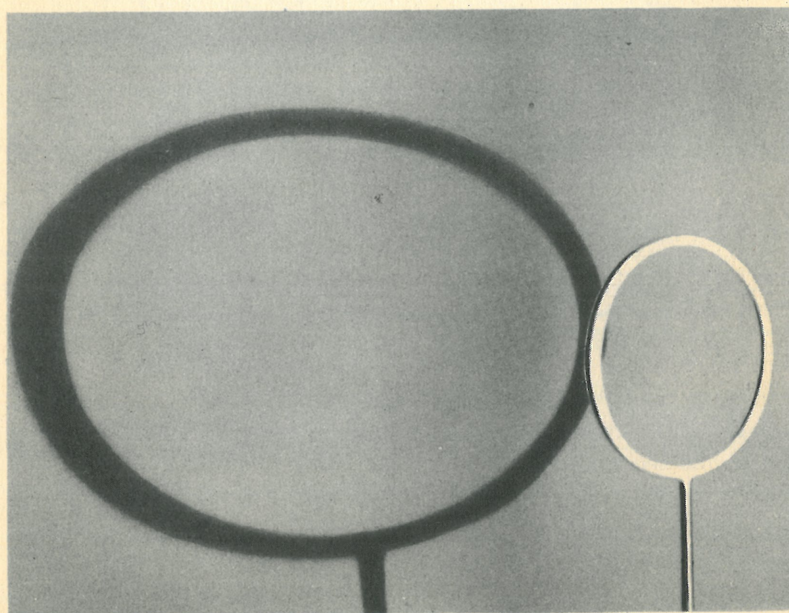
(247)

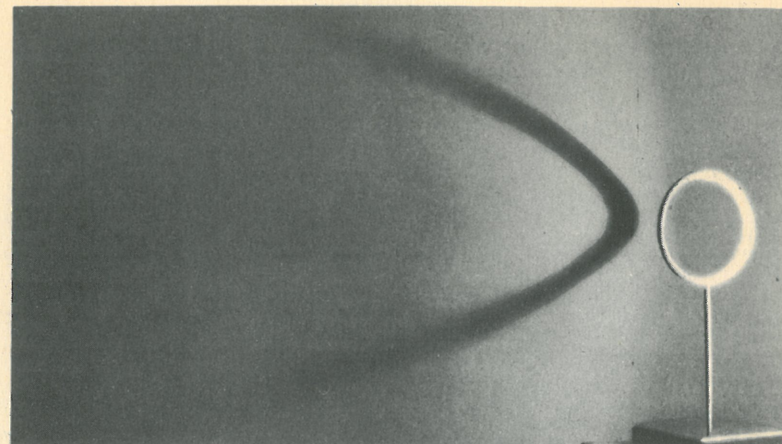


riodycznej grze mięśnia sercowego. Analiza załamań elektrokardiogramu jest trudna.

Trzy krzywe znane wcześniej od innych: elipsę, hiperbolę i parabolę, można otrzymać ze stożka przecinając go płaszczyzną w odpowiedni sposób. Wobec tego można je zrealizować jako cienie obrączki kołowej. Gdy ją umieścimy tak, że cały jej cień pada na ścianę, dostaniemy (248) elipsę; gdy część obrączki nie rzuca cienia na ścianę, otrzymujemy (249) hiperbolę, a gdy tylko jeden punkt obrączki nie daje cienia, pojawia się (250) parabola. Kula leżąca na stole i oświetlona z góry rzuca na stół cień o konturze eliptycznym i dotyka stołu w ognisku tej elipsy.

(248)



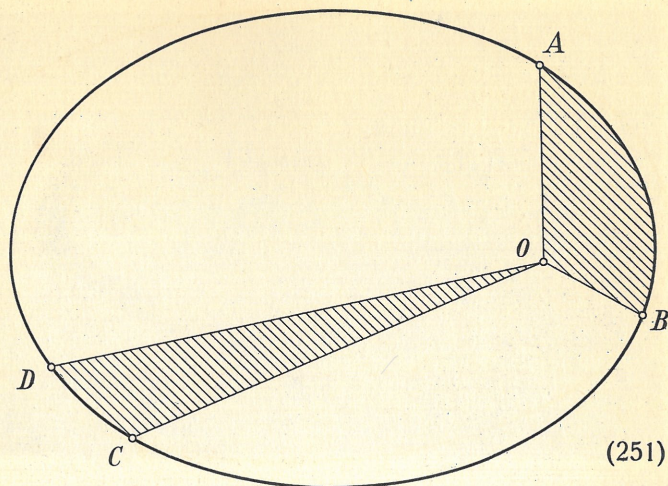


(249)

(250)

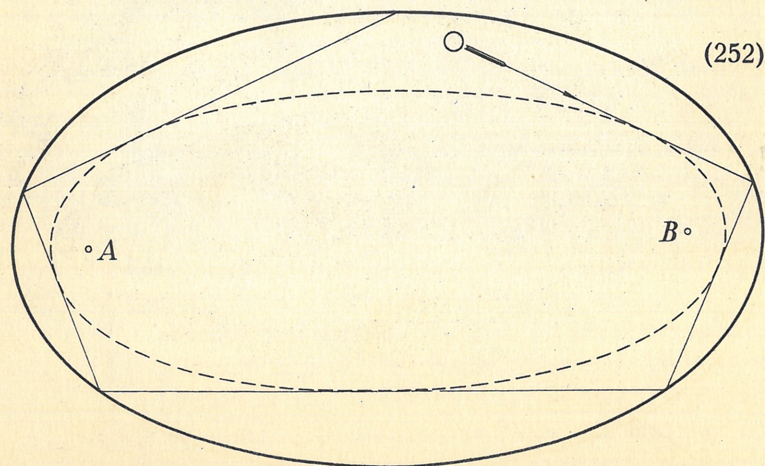


Planety krążą po elipsach. Słońce jest jednym z ognisk. Promień Słońce — planeta zamiata dzień w dzień to samo pole (251) i podobnie co miesiąc, ale widać z rysunku, że Ziemia nie przebywa co miesiąc jednakowej drogi.

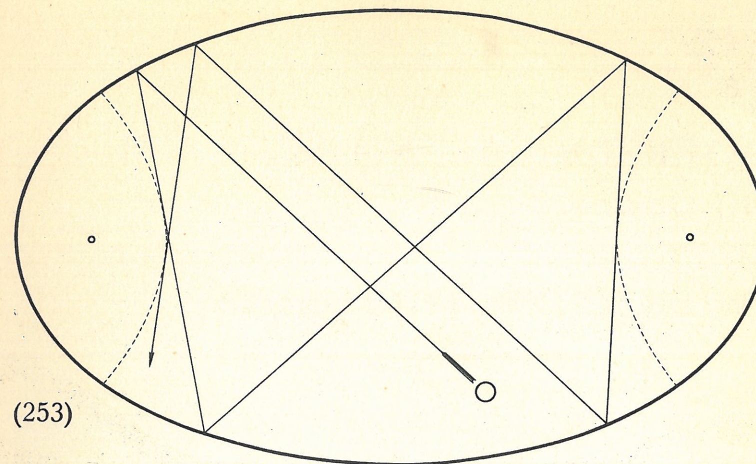


(251)

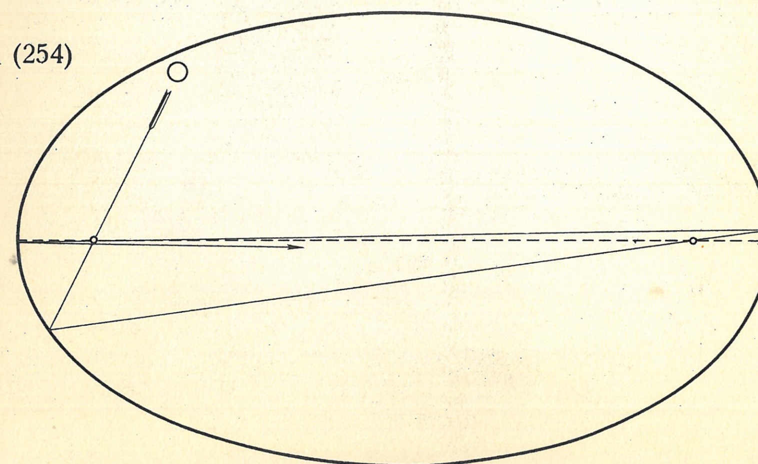
Bilard eliptyczny (252) nadaje bili, puszczonej w ruch od bandy tak, żeby nie przeszła między ogniskami — tor łamany, składający się z odcinków stycznych do pewnej mniejszej elipsy o tych samych ogniskach. Jeżeli jednak uderzymy ją tak, by przeszła między ogniskami, to po odbiciu o bandę znowu przejdzie między



(252)

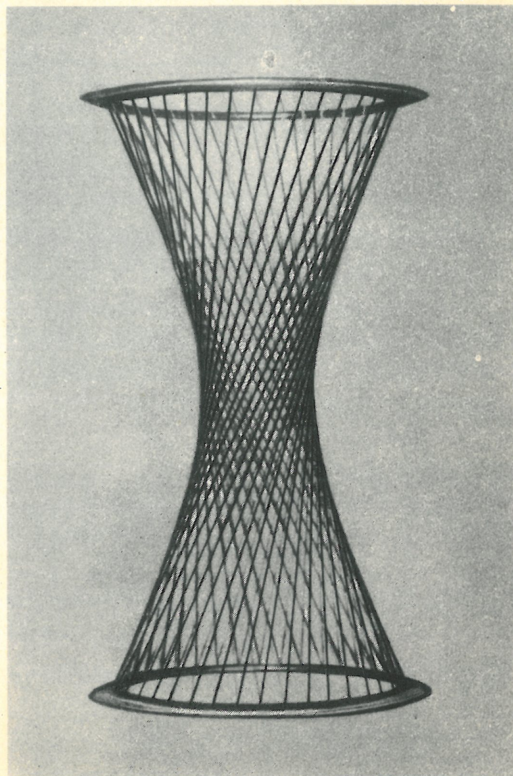

(253)

nimi. Wobec tego już zawsze będzie tak biegła; jej tor (253) będzie złożony z odcinków stycznych do pewnej hiperboli o tych samych ogniskach, co bilard. Gdy bila wystartuje z ogniska, to po odbiciu przejdzie (254) przez drugie ognisko, po następnym — przez pierwsze i tak dalej; jej tor po kilku odbiciach zbliży się bardzo do wielkiej osi bilardu.

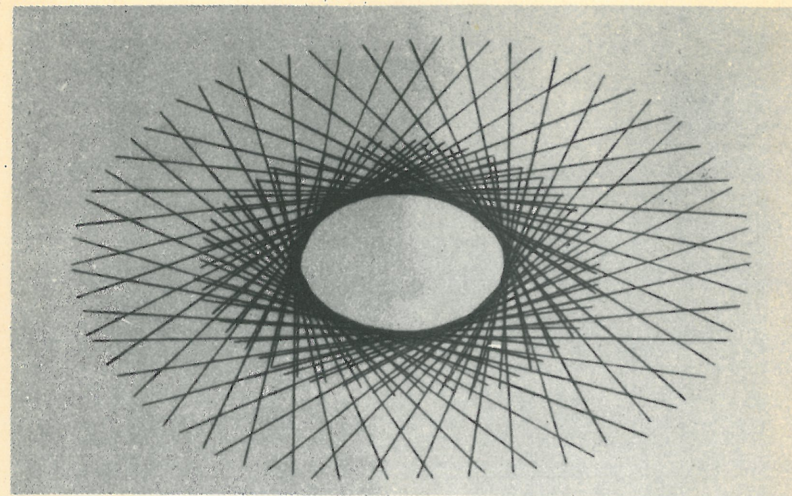

(254)

XI

POWIERZCHNIE Z NITEK
ŁAŃCUSZEK
WÓZEK
POWIERZCHNIA MINIMALNA



(255)

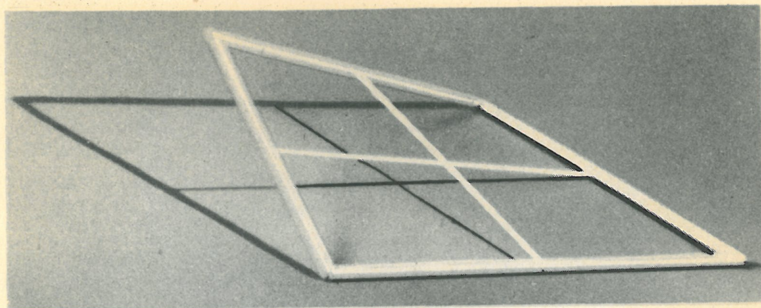


(256)

Wszystkie linie na kuli są krzywe, ale są też krzywe powierzchnie utkane z linij prostych. Takie są na przykład powierzchnie walca i stożka.

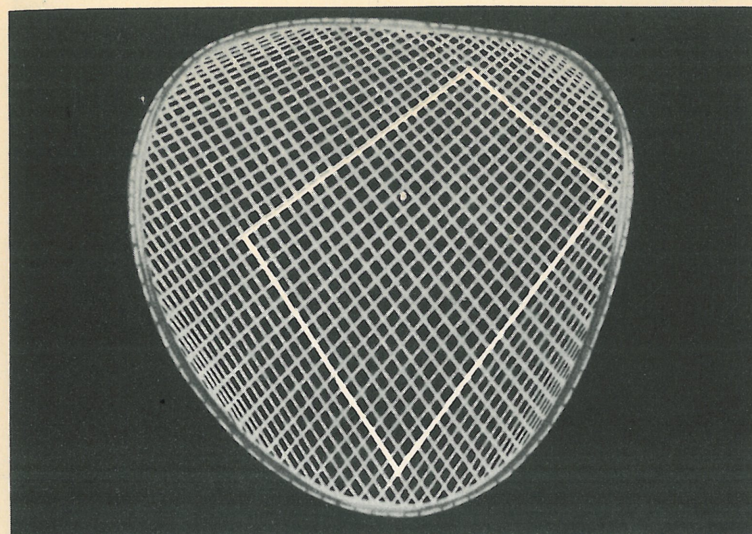
Widzieliśmy już (162) sześcian obracający się, którego krawędzie ślizgają się po dwóch stożkach i po hiperboloidzie obrotowej. Ogólna hiperboloida jednopowłokowa (255) jest utkana z dwóch gromad linij prostych i patrząc na nią z góry widzimy (256) elipsę ze stycznymi.

Paraboloida obrotowa powstaje z obrotu paraboli dokoła jej osi symetrii. Często widuje się reflektory automobilowe o kształcie paraboloidalnym. Wszystkie przekroje takiej paraboloidy, równoległe do osi, są parabolami, i to przystającymi. Tak więc przez każdy punkt paraboloidy obrotowej przechodzi nieskończenie wiele płaskich krzywych przystających do siebie. Kula i płaszczyzna mają również tę własność. (Czy są jeszcze inne przykłady?).



(257)

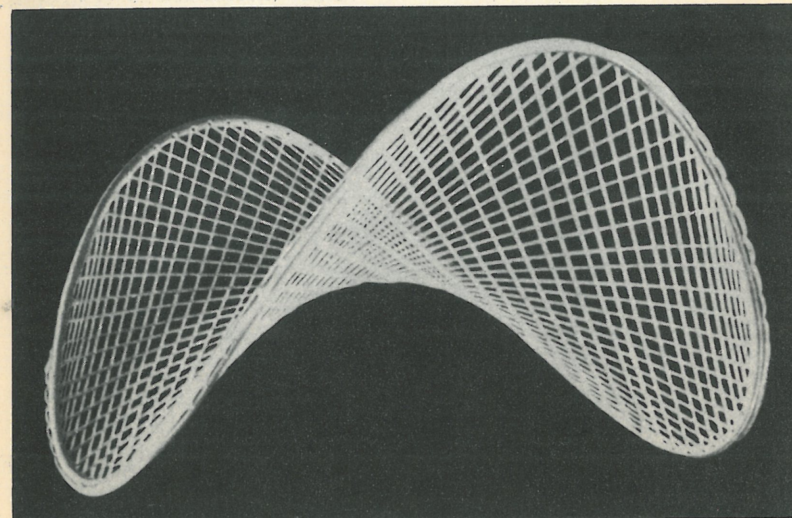
Wichrowaty czworobok (257) o wierzchołkach obsadzonych równymi ciężarkami ma środek ciężkości, który można znaleźć biorąc środek ciężkości jednej pary ciężarków i w nim je umieszczając, potem robiąc to samo z drugą parą, a w końcu szukając środka ciężkości tych parą, a w końcu szukając środka ciężkości tych środków. Ten sposób daje środek odcinka łączącego dwa przeciwległe boki. Ale można było zacząć od innej pary boków przeciwległych i dojść oczywiście do tego samego wyniku. Z tego widać, że odcinki łączące środki przeciwległych boków dowolnego czworoboku wichrowatego (płaskiego też) przecinają się i wzajemnie połowią. Gdy ciężarki a, b, c, d są nierówne, ale proporcjonalne ($a : b = c : d$), otrzymujemy linie dzielące jedną parę boków w stosunku $a : b$, a drugą w stosunku $b : d$. Te linie też się przecinają, jak pokazuje rozumowanie podobne do poprzedniego. Możemy teraz zmienić ciężarki, zachowując proporcję; powstaną dwie gromady prostych, które dadzą powierzchnię krzywą (258) jako tkaninę rozpiętą na czworobocznej ramie. (Metalowy kontur na fotografii jest tylko pomocniczy; aby zobaczyć czworobok, trzeba wybrać sobie po dwie nitki

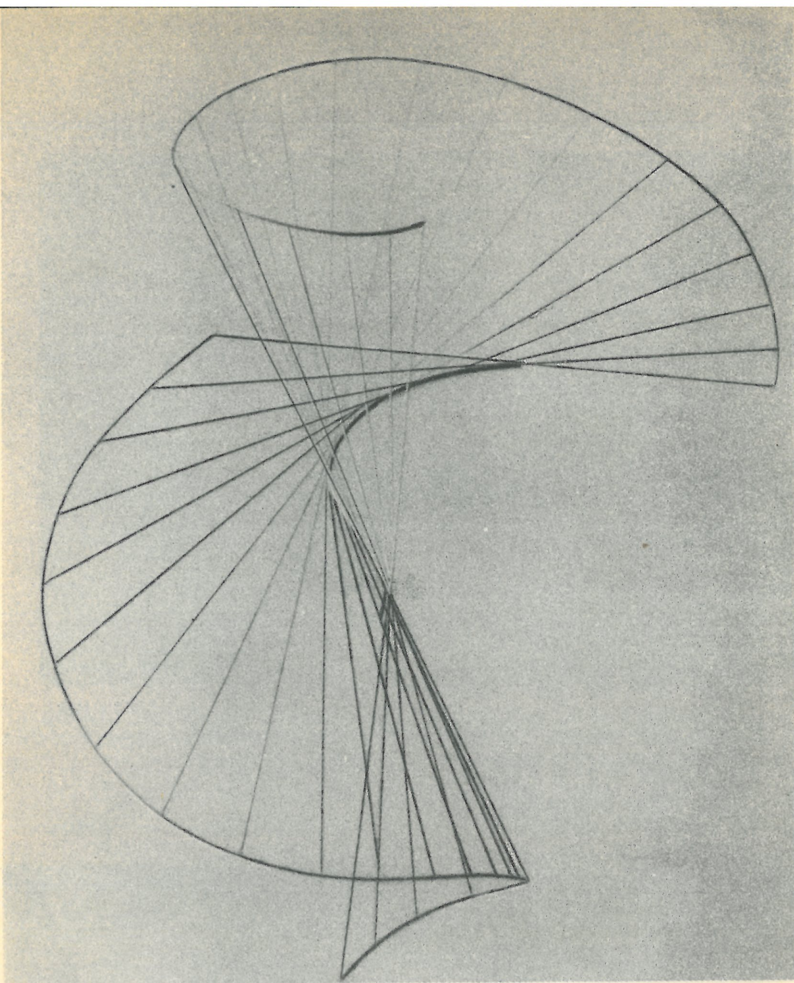


(258)

z każdej gromady). Z boku (259) ta powierzchnia wygląda jak siodło: nazywamy ją paraboloidą hiperboliczną.

(259)



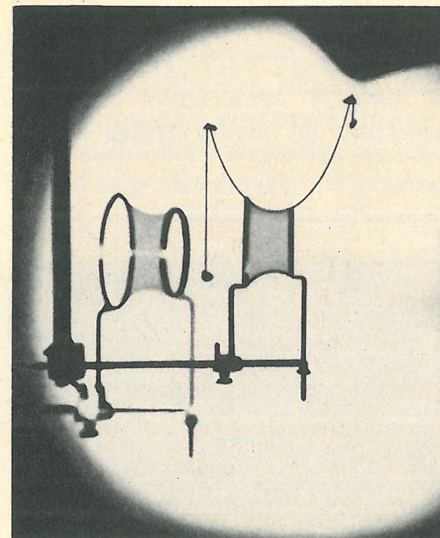


(260)

Jest prosty sposób na tworzenie powierzchni z gromadą prostych na niej: Bierze się płaski drut ze stycznymi w postaci laseczek przywiązanych do niego i wichruje się ten drut w dowolny sposób w krzywą przestrzenną: Powstaje dwulistna powierzchnia (260) utkana z jednej gromady linij prostych; drut jest ostrą krawędzią wspólną obu liściom i żaden z nich nie rozciąga się poza tę krawędź.

Dwie obrączki z drutu mające wspólną oś (tak jak górna i dolna podstawa stożka ściętego), zanurzone w mydlinach, dają (261) powierzchnię obrotową, najmniejszą ze wszystkich, którą można rozpiąć na takiej ramie, bo błona mydlana kurczy się jak tylko może najbardziej.

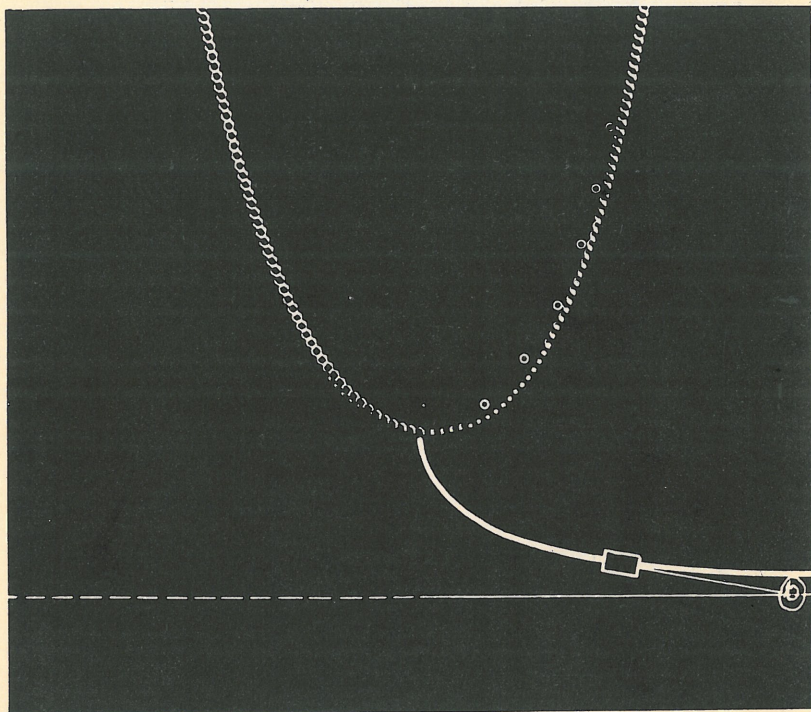
(261)



Na fotografii widać obok powierzchni jej cień na ekranie. Równoleżniki powierzchni są kołami, a południk widać wyraźnie jako górny kontur cienia na ekranie, dzięki powiększeniu przy projekcji. Został on zdjęty umyślnie wraz z nitką wiszącą na ekranie — dla dowodu, że południk ma kształt linii łańcuchowej, to znaczy przybiera kształt łańcuszka (262) wiszącego na dwóch gwoździach. Równanie tej linii jest $y = 10^x + 10^{-x}$, gdy się dobierze odpowiednie jednostki dla pomiaru x i y.

Chcąc powrócić do minimalnej powierzchni mydlanej wystarczy obracać łańcuszek koło osi x-ów. Jak znaleźć tę oś, gdy dany jest łańcuszek? Trzeba go przeciąć w najniższym punkcie i wyprostować. Do tego trzeba zaopatrzyć ścianę, na której wisi, w gwoździe po stronie wklęsłej łańcuszka, aby nie mógł się cofać, a potem pozostawić rozcięty łańcuszek sile ciężkości. Koniec łańcuszka opisze wtedy taką samą drogę, jak wózeczek (263) ciągniony przez dziecko, które idzie po krawężniku chodnika. Wózeczek wleczony po jezdni zbliża się do krawężnika,

(262)



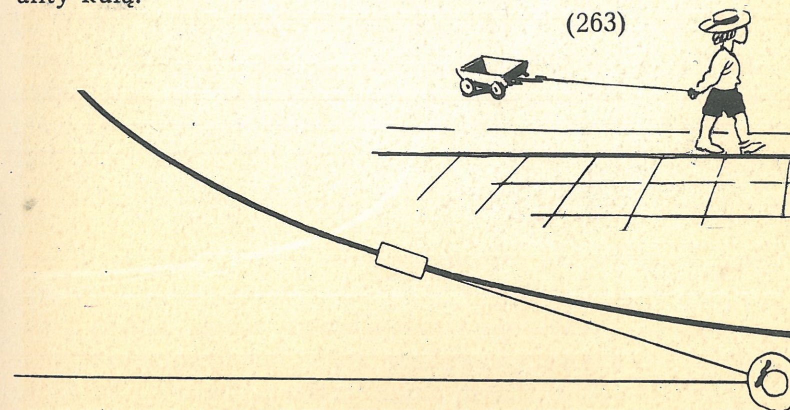
ale go nigdy nie osiągnie. Krawężnik jest szukaną osią. Wobec tego można określić oś jako najwyżej położoną prostą poziomą, której jeszcze nie dotknie rozcięty i swobodnie opadający łańcuszek swoimi końcami.

Traktrysę, zakreśloną wózeczkiem (lub końcem łańcuszka), można obrócić dokoła krawężnika (to jest dokoła osi linii łańcuchowej) i dostać nową powierzchnię obrotową, która ma tę osobliwą własność, iż listek (np. listek pozłótki lub staniolu), pokrywający jakąś jej cząstkę, może wędrować po całej powierzchni przylegając do niej szczelnie, nie rozrywając się, nie rozciągając się, ani nie marszcząc. Tę samą własność mają sfera, walec, stożek i płaszczyzna, także wszystkie powierzchnie powstałe przez zwijanie i fałdowanie płaszczyzny, a więc wszelkie draperie z nierozciągliwych tkanin.

Ale traktrysoida obrotowa ma jeszcze tę osobliwość, że jej krzywizna jest ujemna, to znaczy, że każdy jej punkt jest siodłowy. Ta krzywizna jest wszędzie jednakowa, jak na kuli; tego uczy eksperyment z przesuwaniem listka.

Dlatego traktrysoida jest niby-kulą, a raczej anty-kulą.

(263)



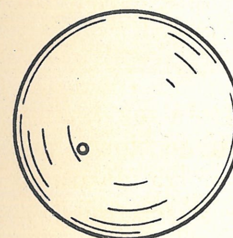
XII

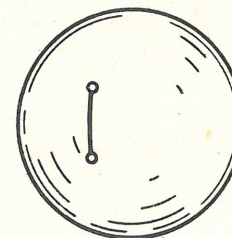
SPACERY PO MOSTACH
SZUKANIE ŚCIEŻEK
WIĄZANIE WĘZŁÓW
TOREBKI
CZESANIE WŁOSÓW

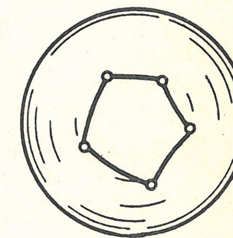
Powiedzieliśmy już, że jest tylko pięć wielościanów regularnych, czyli brył platońskich, ale nie powiedzieliśmy dlaczego.

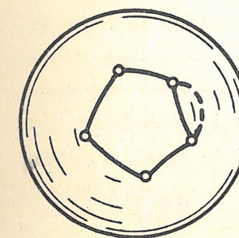
Narysujmy na kuli figurę, która ma L linij, V wierzchołków i S ścian. Innymi słowy, podzielmy świat na S krajów (morza uważamy za lądy). Jakakolwiek byłaby sytuacja międzynarodowa dyktująca ten podział, zawsze będzie $V + S = L + 2$. Nie trudno sprawdzić tę regułę, odkrytą przez Eulera, wielkiego matematyka szwajcarskiego. Zacznijmy (264) od jednego wierzchołka: Biorąc regułę dosłownie, zobaczymy, że się sprawdzi, bo jest jeden wierzchołek ($V = 1$), jeden kraj ($S = 1$) i ani jednej granicy ($L = 0$), i $1 + 1 = 0 + 2$. Rysując z wierzchołka jedną kreskę (265) uzyskujemy nowy podział sfery ziemskiej — i znowu reguła jest dobra, bo $V = 2$, $S = 1$, $L = 1$ i $2 + 1 = 1 + 2$. Niech teraz będzie (266) dowolna figura sprawdzająca regułę Eulera i narysujmy nową linię (267), (268) łączącą wierzchołek z innym wierzchołkiem figury. Przez to

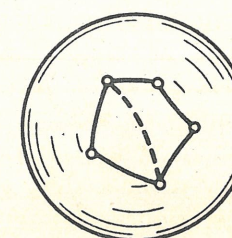
zwiększymy liczbę wierzchołków o 0, liczbę ścian o 1, a liczbę linij o 1; to znaczy, że nowa linia powiększyła o 1 lewą stronę wzoru Eulera i o 1 prawą stronę. Jeżeli stara figura sprawdzała wzór Eulera, to i nowa go potwierdzi. Nawet gdy nowa linia (269) kończy się na nowym wierzchołku, przyrost wierzchołków będzie 1, przyrost ścian 0, a przyrost linij 1 i znowu reguła się utrzyma. Ponieważ możemy narysować każdy podział na kraje zaczynając od wierzchołka, a potem rysując potrzebne granice jedna po drugiej, więc reguła Eulera jest zawsze prawdziwa. (Jaki jest związek z dominem?).

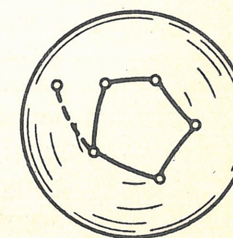

(264)


(265)


(266)


(267)


(268)


(269)

Wśród wszystkich możliwych podziałów sfery podziały foremne, które nas interesują, są wyróżnione przez to, że mają tę samą liczbę s linij ograniczających każdy kraj i tę samą liczbę v linij schodzących się w każdym narożu. Gdy jest S ścian (krajów), iloczyn Ss daje liczbę wszystkich linij, ale licząc każdą dwa razy, bo każda należy do dwóch ścian. Stąd $2L = Ss$. Możemy także policzyć linie naroże po narożu; to da $2L = Vv$. Otrzymamy stąd

$$S = \frac{2L}{s}, \quad V = \frac{2L}{v}$$

i wstawiając za S i V we wzorze Eulera ułamki tu znalezione otrzymamy

$$\frac{2L}{v} + \frac{2L}{s} = L + 2.$$

To można także napisać tak:

$$\text{(E)} \qquad \frac{1}{v} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{L}.$$

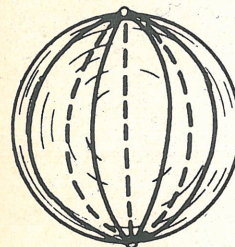
Najłatwiej spełnić równanie (E) biorąc

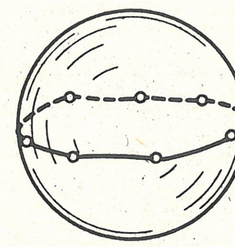
$$s = 2,\ v = L \quad \text{lub} \quad v = 2,\ s = L.$$

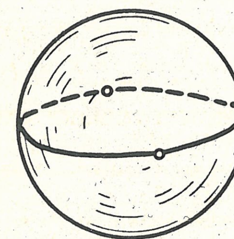
Pierwszy sposób daje $S = L$, $V = 2$. Mamy tylko dwa wierzchołki i tyle ścian, co linij; ponieważ $v = L$, każda linia należy do każdego wierzchołka, a ponieważ $s = 2$, każda ściana jest ograniczona dwiema liniami. A więc mamy (270) dwa bieguny połączone L południkami; ich liczba jest dowolna ($L = 1, 2, 3, \ldots$).

Drugi sposób daje $V = L$, $S = 2$. Teraz mamy tylko dwie ściany i tyle wierzchołków, co linij. Ponieważ $s = L$, więc każda linia należy do obu ścian; to znaczy, że wspólna granica ścian składa się z L linij i z L wierzchołków. Tak więc glob podzielił się (271) na dwie półkule odgraniczone L-bokiem; liczba L jest dowolna.

Te dwie mapy będziemy uważali za wyjątkowe. Zauważmy (272), że przypadek $s = 2$, $v = 2$ należy równocześnie do obu typów wyjątkowych.


(270)


(271)


(272)

Wróćmy do ogólnego równania (E) i spróbujmy wstawić w nie $L = 1$. Możemy łatwo stwierdzić, że jedyne rozwiązania będą wtedy: $v = 1$, $s = 2$ lub $v = 2$, $s = 1$, a więc wyjątkowe. Jedno z nich jest na rysunku (265). Jak wygląda drugie?

Próba $L = 2$ da $v = 2$, $s = 2$, czyli rozwiązanie wyjątkowe z rysunku (272).

Chcąc znaleźć nowe rozwiązania musimy wstawić za L kolejno liczby 3, 4, 5, ... Wtedy po prawej stronie równania (E) znajdzie się ułamek mniejszy od 1, a że zawsze jest tam więcej niż 1/2, więc będzie

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{s} + \frac{1}{v} < 1.$$

Wartość $s = 1$ nie zgadza się z prawą nierównością, a wartość $s = 2$ daje figury wyjątkowe rysunku (270), już uwzględnione.

Musimy zacząć od $s = 3$. Możemy tutaj próbować tylko $v = 3$, 4 lub 5, bo $v = 1$ jest niezgodne z prawą nierównością, $v = 2$ daje rysunek (271) już uwzględniony i wyjątkowy, a przy $s = 3$ i $v = 6$ lub więcej otrzymujemy w sumie $1/s + 1/v$ liczbę 1/2 lub mniej, wbrew lewej nierówności. To samo rozumowanie pokazuje, że nadając liczbie s wartość większą od 3 musimy się ograniczyć do $v = 3, 4, 5$, aby zadowolić lewą nierówność. Ale wszystko, co powiedzieliśmy, można powtórzyć pisząc wszędzie s zamiast v i v zamiast s. Widzimy więc, że odrzucając przypadki niemożliwe lub wyjątkowe musimy się ograniczyć do $3 \cdot 3 = 9$ przypadków, które się otrzymuje z wartości $s = 3, 4, 5$ i $v = 3, 4, 5$. Z nich cztery:

$$s = 4,\ v = 4,$$
$$s = 5,\ v = 4,$$
$$s = 4,\ v = 5,$$
$$s = 5,\ v = 5,$$

są niemożliwe z powodu lewej nierówności: już $1/4 + 1/4 = 1/2$ jest za małe. Pozostaje pięć przypadków:

(a) $s = 3, v = 3$;

(E) daje $1/3 + 1/3 - 1/2 = 1/L$,
$L = 6,\ S = 4,\ V = 4$.

(b) $s = 3, v = 4$;
(E) daje $1/3 + 1/4 - 1/2 = 1/L$,
$L = 12,\ S = 8,\ V = 6$.

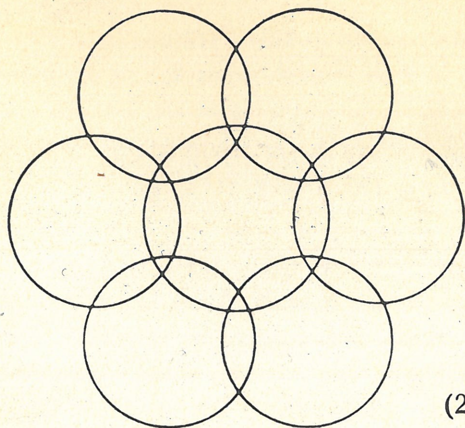
(c) $s = 3, v = 5$;
(E) daje $1/3 + 1/5 - 1/2 = 1/L$,
$L = 30,\ S = 20,\ V = 12$.

(d) $s = 4, v = 3$;
(E) daje
$L = 12, S = 6, V = 8$,

(e) $s = 5, v = 3$;
(E) daje
$L = 30, S = 12, V = 20$.

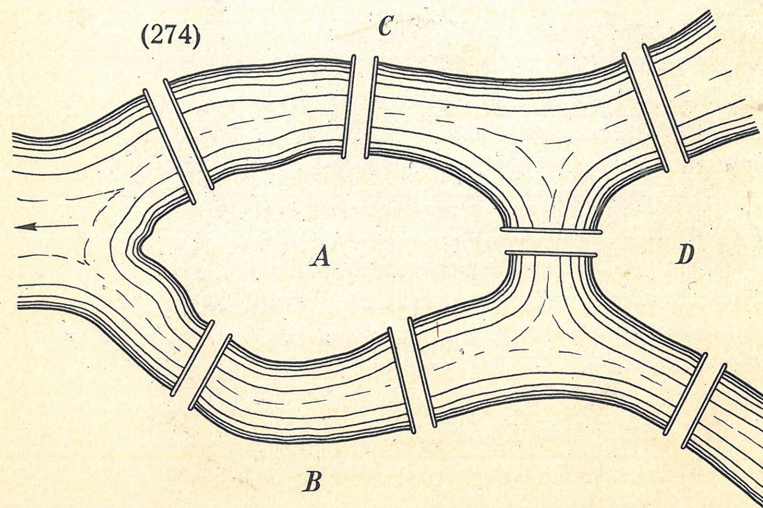
Uprościliśmy sobie rachunki zamieniając s z v i S z V w (b) i (c), co daje od razu (d) i (e). W końcu znaleźliśmy pięć regularnych, czyli platońskich podziałów sfery. Wyjątkowe podziały nie dają wielościanów, gdyż nie ma ani dwuboków o prostych bokach na płaszczyźnie, ani dwuścianów o płaskich ścianach w przestrzeni. Pięć brył platońskich, odpowiadających podziałom (a), (b), (c), (d) i (e), są to: czworościan, ośmiościan, dwudziestościan, sześcian i dwunastościan — i teraz już wiemy, że nie ma innych brył foremnych.

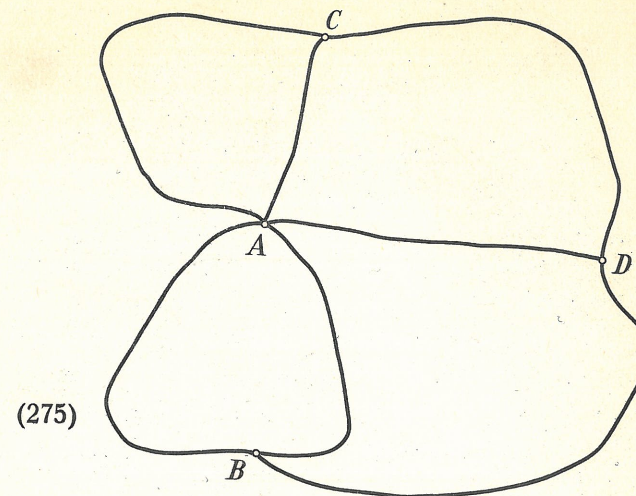
Zdajmy sobie sprawę, że udowodniliśmy znacznie więcej, niżeśmy obiecali. Znaleźliśmy mianowicie wszystkie regularne podziały globu, bez względu na to, czy granice ich są kołowe, czy też zygzakowate i pokręcone. Co więcej, kształt globu jest obojętny: rozważania nasze są ważne także dla planet sześciennych lub soczewkowych.


(273)

Przypominają one starą zabawkę kreślenia figur bez odrywania ołówka od papieru i bez powtarzania linij. Tutaj (273) da się to zrobić.

Euler zajął się kwestią, jakie figury dadzą się tak narysować, gdy mu postawiono zagadkę

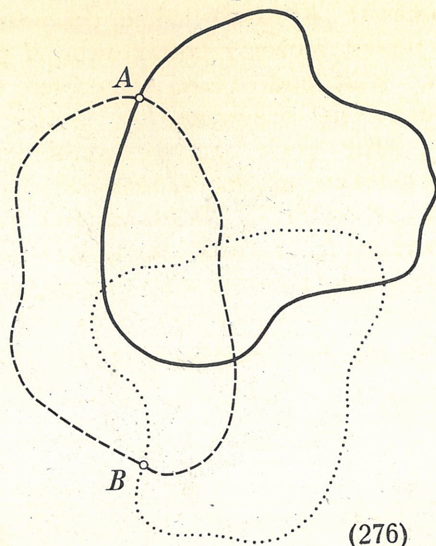
(274)




(275)

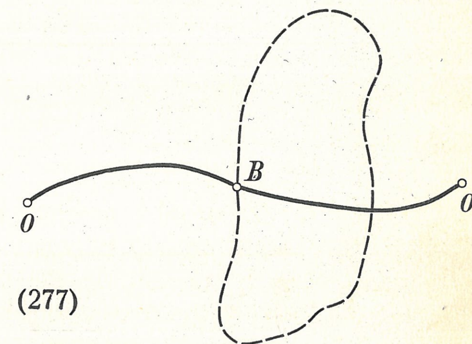
(274) mostów królewieckich. Było ich siedem i trzeba było przejść przez wszystkie nie przechodząc przez żaden dwa razy. Czy to jest możliwe?

Gdy oznaczymy wyspę przez *A*, lewy brzeg rzeki przez *B*, prawy przez *C*, a obszar między dwoma ramionami górnego biegu przez *D*, zadanie sprowadzi się do narysowania figury (275) jednym ciągiem. Jest ono niewykonalne, bo wybrawszy którykolwiek z punktów *A*, *B*, *C*, *D* za początek i którykolwiek za koniec będziemy musieli przejść po drodze przez dwa (lub trzy) punkty, które nie będą ani początkowe, ani końcowe; przy takim przejściu wchodzi się jedną drogą, a wychodzi inną, a ponieważ w każdym punkcie schodzą się trzy drogi lub pięć, więc pewne drogi pozostaną nie narysowane.



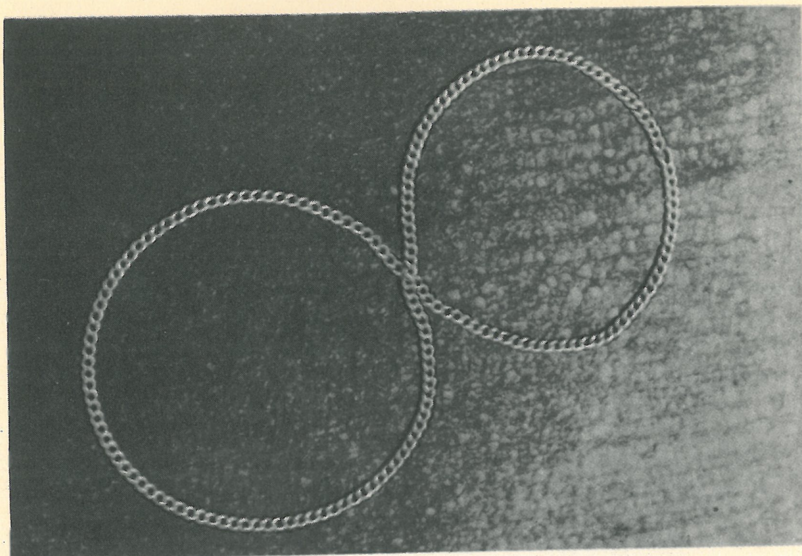
(276)

Z drugiej strony, każda figura, która ma same punkty parzyste (to znaczy takie, w których schodzi się parzysta liczba dróg) lub też co najwyżej dwa punkty nieparzyste — da się narysować jednym ciągiem, byle tylko była spójna. Pokażemy to dla figur o samych punktach parzystych. Zaczniemy w dowolnym punkcie. Ponieważ z każdego punktu, do którego dojdziemy, znajdziemy wyjście, więc bez względu na plan podróży zatrzymamy się dopiero w punkcie startu. Całą drogę możemy uważać za krzywą zamkniętą; jeżeli nie wyczerpuje ona całej figury, to łączy się z częścią nie zwiedzoną w jakimś punkcie *A*. Z dróg wiodących do *A* parzysta liczba należy do starego toru, a więc parzysta liczba — do części nie zwiedzonej. Zmieńmy początkowy plan i przebiegnijmy (276) stary tor od *A* do *A* (gruba linia na rysunku). Ponieważ *A* należy także do pozostałej części figury, możemy potraktować *A* po powrocie jako start podróży po tej części; ta podróż skończy się oczywiście w *A* (linia kreskowana). Ale dwie krzywe zamknięte o wspólnym punkcie można uważać za jedną (taką krzywą jest cyfra 8). Jeżeli zadanie nie jest jeszcze wykonane, ta nowa krzywa łączy się z resztą figury w jakimś punkcie *B*; zastosujemy poprzednią metodę i w końcu dojdziemy do planu podróży po całej figurze.



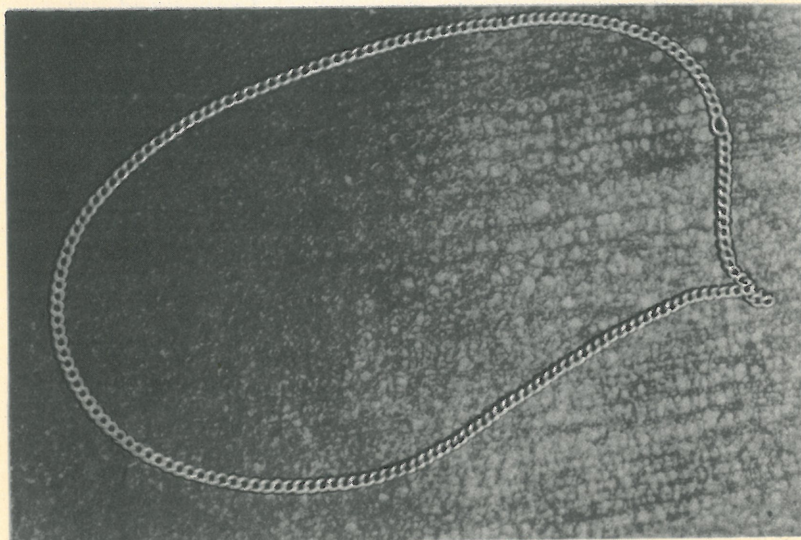
(277)

Przypadek dwóch punktów wyjątkowych (to jest nieparzystych) da się podobnie rozwiązać. Musimy zacząć w wyjątkowym punkcie *O*; jest jasne, że każda droga skończy się w drugim punkcie nieparzystym *O′*. Reszta figury już nie ma punktów wyjątkowych, jest ona zatem drogą zamkniętą (277), która w jakimś punkcie *B* łączy się z pierwszą drogą *O — O′*. Możemy więc zacząć w *O*, dojść do *B*, objechać zamknięty tor (linia kreskowana) i wróciwszy do *B* dokończyć po drodze *B — O′* podróży *OO′*.



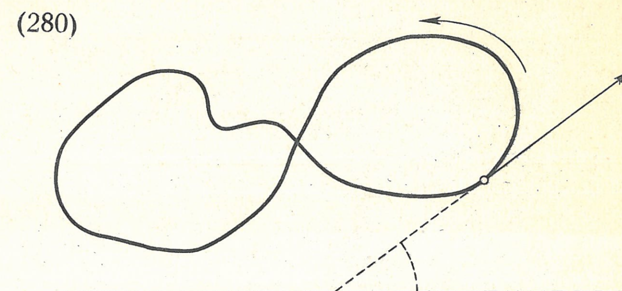
(278)

(279)



Popatrzmy na łańcuszek (278), który się krzyżuje sam z sobą. Gdy go będziemy rozciągali na stole tak, by skrzyżowanie znikło, musimy przejść przez takie położenie (279), w którym łańcuszek się „łamie", to znaczy dostaje w jakimś miejscu ostrze. To można udowodnić z zachowania się (280) stycznej. Jej kąt względem stałego kierunku zmienia się, gdy idziemy wzdłuż łańcuszka, ale jego przyrosty są niweczone przez ubytki i całkowity przyrost po całym obiegu jest zerowy. Gdy łańcuszek nie ma skrzyżowania, przyrost jest 360°. Wobec tego musi być przejściowy kształt, kiedy łańcuszek przechodzi od postaci z przyrostem 0° do postaci z przyrostem 360°; jest to właśnie kształt z ostrzem, które kasuje nagle cały przyrost kąta nabyty przez styczną przy zupełnym obiegu.

(280)



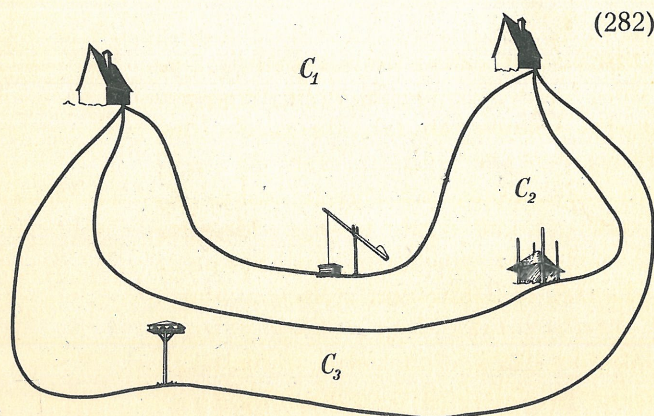
Rysunek (281) ilustruje kwestię podobną do mostów królewieckich. Mamy trzy domy, gołębnik, studnię i bróg; trzeba znaleźć z każdego domu ścieżki do gołębnika, studni i brogu tak,



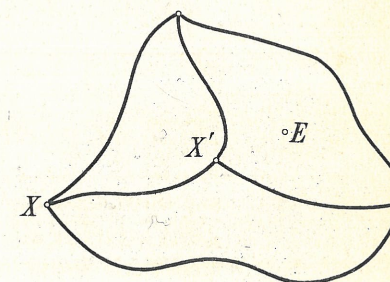
(281)

by się nie przecinały wzajemnie. To jest niemożliwe. Rzeczywiście, gdy połączymy pierwszy dom ścieżkami z gołębnikiem, studnią i brogiem i będziemy szli przez te punkty dalej po ścieżkach, które je łączą z drugim domem, otrzymamy (282) trzy linie łączące pierwszy dom z drugim i nie przecinające się. Takie trzy linie

(282)



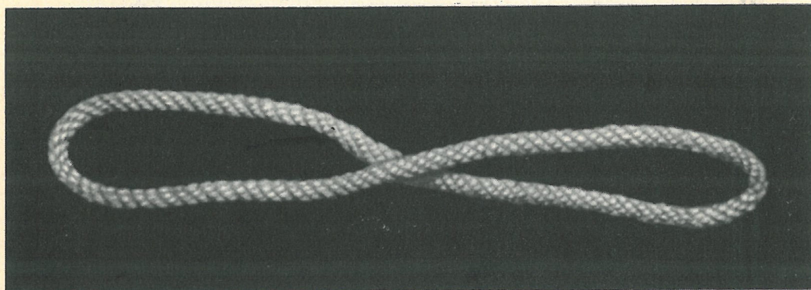
dzielą całą płaszczyznę na trzy obszary: C_1, C_2 i C_3. Otóż trzeci dom musi leżeć w jednym z tych obszarów. Jeżeli leży w C_1, to jest poza linią zamkniętą, która obejmuje bróg; jeżeli w C_2, to leży wewnątrz innej linii zamkniętej, poza którą jest gołębnik, jeżeli leży w C_3, to znajduje się wewnątrz linii zamkniętej, która nie obejmuje studni. W pierwszym przypadku trzeci dom nie da się połączyć z brogiem, w drugim przypadku — z gołębnikiem, w trzecim — ze studnią, bo te połączenia musiałyby przecinać inne ścieżki.



(283)

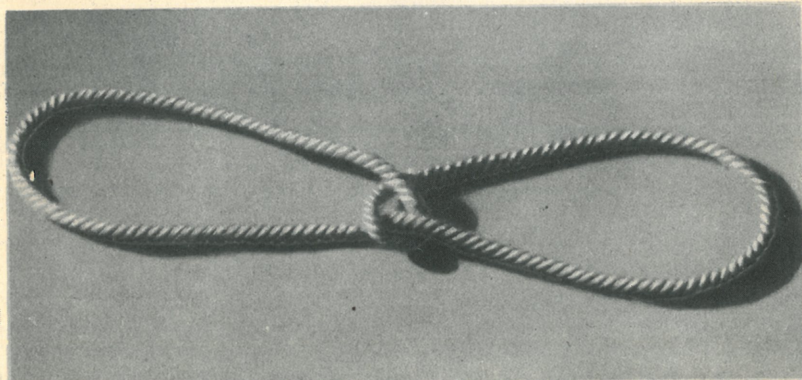
Wyobraźmy sobie cztery kraje sąsiadujące ze sobą parami. Ich stolice można wobec tego połączyć liniami kolejowymi tak, by każda linia szła wyłącznie przez terytoria należące do stacyj końcowych. Zacznijmy od trzech stolic: *A*, *B*, *C*. Linie utworzą jakby trójkąt. Czwarta stolica, *D*, jest albo wewnątrz, albo zewnątrz trójkąta. Łącząc ją z tamtymi stolicami otrzymamy w każdym razie duży trójkąt złożony z trzech przylegających do siebie mniejszych trójkątów. Teraz (283) niech *E* będzie stolicą pią-

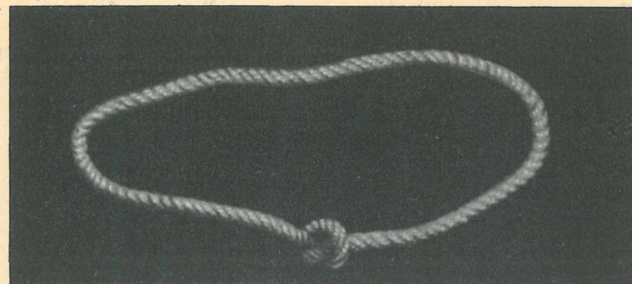
tego kraju; musi ona leżeć albo poza dużym trójkątem, albo w jednym z trzech małych. W obu przypadkach znajdzie się wśród stolic A, B, C, D jedna taka, X, która jest oddzielona od E trójkątem linij kolejowych. (Rysunek pokazuje oba przypadki; litery z kreską odnoszą się do jednego, a bez kreski do drugiego). Ale te linie przechodzą wyłącznie przez terytoria nie należące ani do X, ani do E, a więc kraj E nie sąsiaduje z krajem X. Stąd wniosek, że nigdy pięć krajów nie sąsiaduje każdy z każdym bez wyjątku.



(284)

(285)



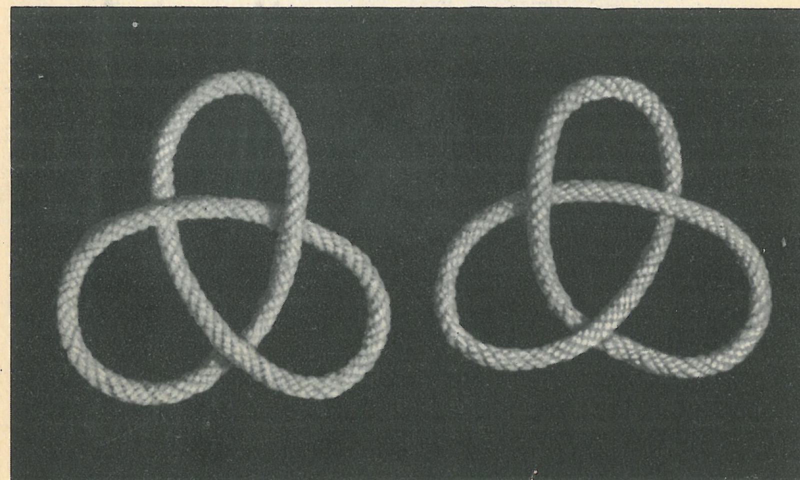


(286)

To wszystko należy do osobnego działu geometrii, zwanego topologią; do niego należy też nauka o węzłach.

Sznur o końcach połączonych (284) będzie zawsze niezwęźlony, jeżeli nie było na nim węzła przed zszyciem końców; jeżeli jednak węzeł był (285), to nie zniknie (286), chyba że przetniemy sznur. Najprostszy węzeł ma dwie postaci (287); jedna z nich jest lustrzanym odbiciem drugiej.

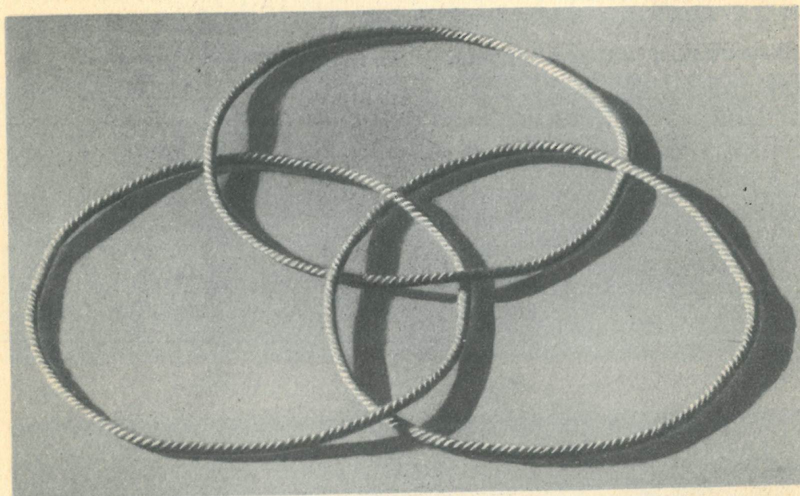
(287)



Węzeł można przesuwać wzdłuż sznura tak daleko, jak chcemy, ale nie można zawiązać na dwóch końcach sznura węzłów tak, by sprowadzone do siebie nawzajem się skasowały. Dopiero w bieżącym roku znaleziono dowód matematyczny tej prawdy doświadczalnej.

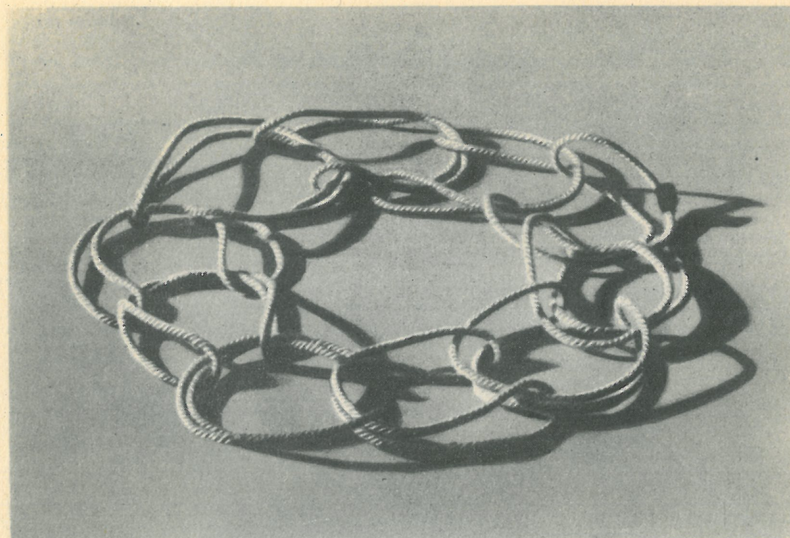
Łatwo sporządzić trzy sznury tak z sobą splecione (288), by żadna para nie była spleciona;

(288)



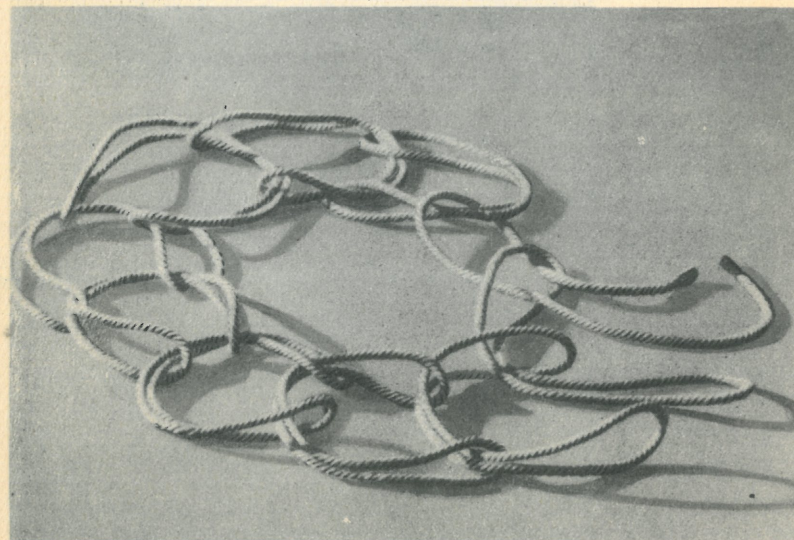
tu widać, że przecięcie któregokolwiek sznura powoduje rozpadnięcie się całego splotu. Można też zrobić model o podobnej własności (289 A) z dowolnej liczby krzywych zamkniętych.

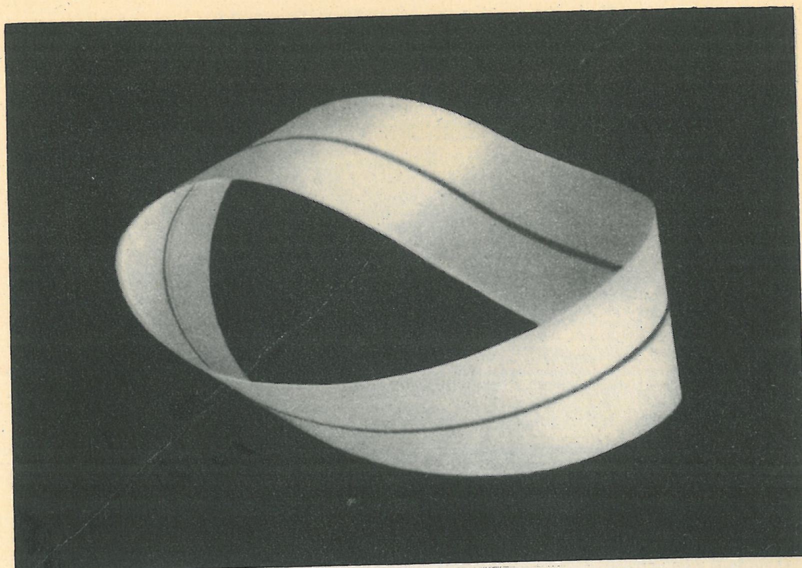
Wstęga papierowa skręcona o 180° i sklejona (wstęga Möbiusa) jest (290) powierzchnią jednostronną. Mucha może dostać się z każdego punktu na niej do każdego innego bez przechodzenia przez krawędź. Ta krawędź jest krzywą zamkniętą niezwęźloną.



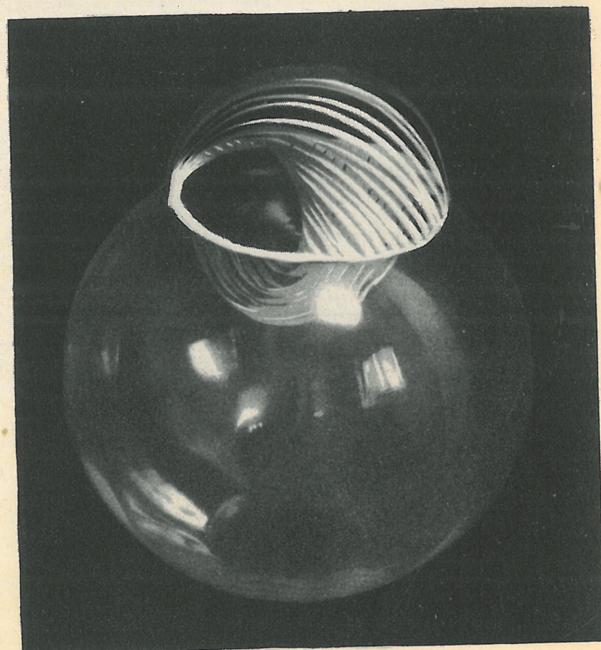
(289 A)

(289 B)

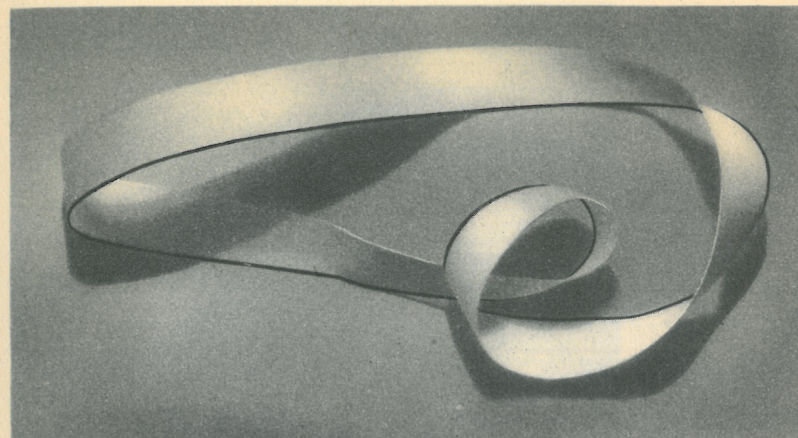




(290)



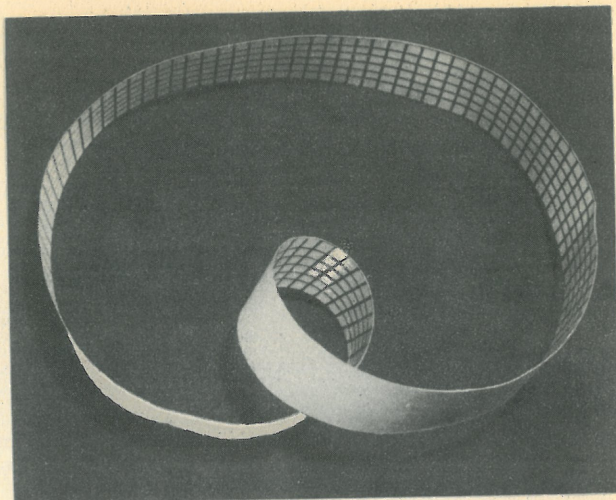
(291)



(292)

Gdyby wstęga Möbiusa była z bardzo elastycznej gumy, można by jej brzeg doprowadzić do kształtu kółka, a wtedy wstęga zamieniłaby się (291) na torbę, w której można nosić przedmioty, chociaż nie ma ona strony wewnętrznej i zewnętrznej.

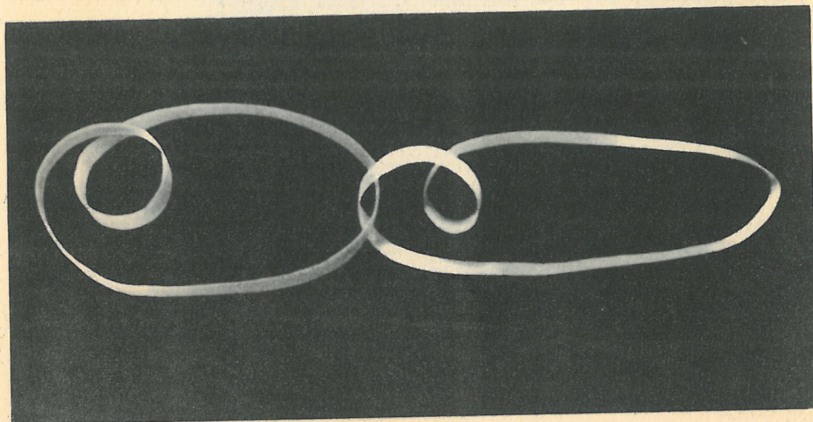
Gdy rozetniemy wstęgę Möbiusa wzdłuż czarnej linii środkowej, równoległej do krawędzi, wstęga się nie rozpadnie, lecz utworzy (292) powierzchnię dwustronną. Tak powstały pas ma za brzegi dwie linie zamknięte niezwęźlone, ale zaplecione jedna za drugą. Te same własności (dwie strony, dwa niezwęźlone i zaplecione brzegi) ma (293) wstęga skręcona o 360° przed sklejeniem; wstęga powstała z rozcięcia möbiusowej ma skręcenie 720°. Jest inna powierzchnia o zupełnie tych samych własnościach, co model fotografii (293), a mianowicie odbicie lustrzane tego modelu: żadne wyginanie i rozciąganie bez przecinania nie przeprowadzi tych powierzchni jednej w drugą.

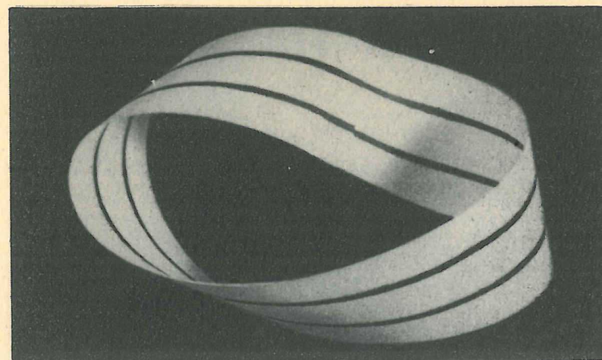


(293)

Model (293) rozcięty wzdłuż linii środkowej daje (294) dwie wstęgi splecione; obie są powtórzeniem pierwotnego modelu.

(294)

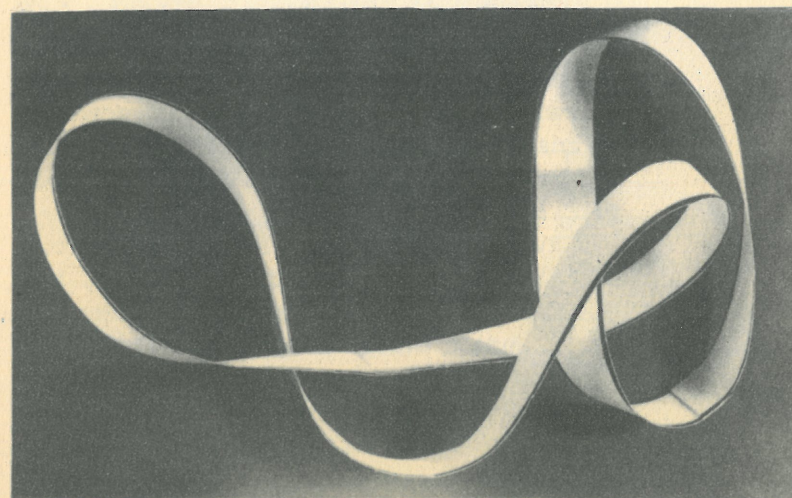


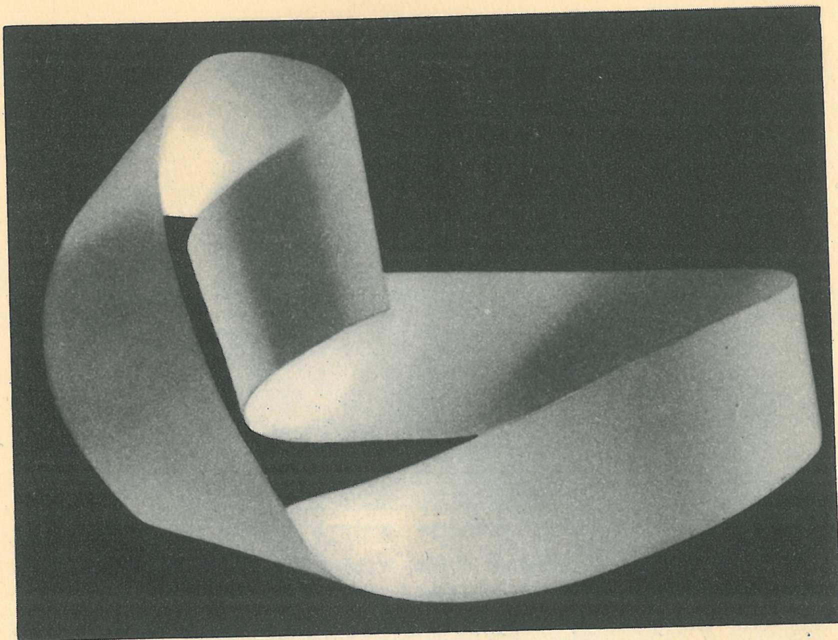


(295)

Gdy na wstędze Möbiusa narysujemy linię w odległości od brzegu równej jednej trzeciej szerokości wstęgi i przetniemy wstęgę (295) wzdłuż tej linii, powstaną dwie wstęgi zaplecione za siebie (296); mniejsza będzie powtórzeniem pierwotnej, większa zaś będzie miała postać już znaną z fotografii (293).

(296)





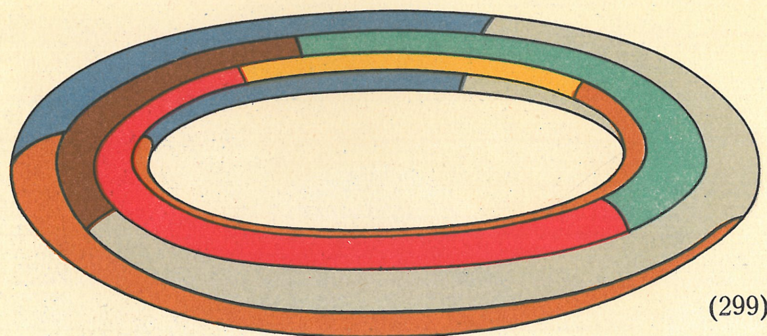
(297)

Gdy przed sklejeniem skręcimy wstęgę o 540°, czyli o trzy półobroty, wyjdzie znowu (297) powierzchnia jednostronna, której brzeg będzie krzywą zwęźloną o węźle typu „koniczynowego", to znaczy takiego jak na fotografii (287). Czy będzie to lewy, czy prawy model tej fotografii?

Zwykły płat, na przykład liść, ma dwie strony, a jego brzeg jest niezwęźlony. Wobec tego powstaje pytanie: czy istnieje powierzchnia dwustronna o brzegu zwęźlonym? Odpowiedź daje model (298). Brzeg jest tu węzłem koniczynowym lewego typu (287), a strony powierzchni są odróżnione na fotografii, bo jedna z nich jest kreskowana, a druga biała.

(298)

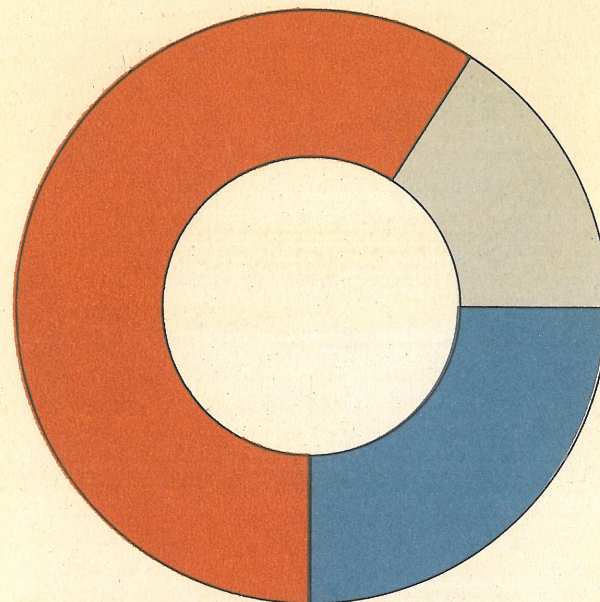




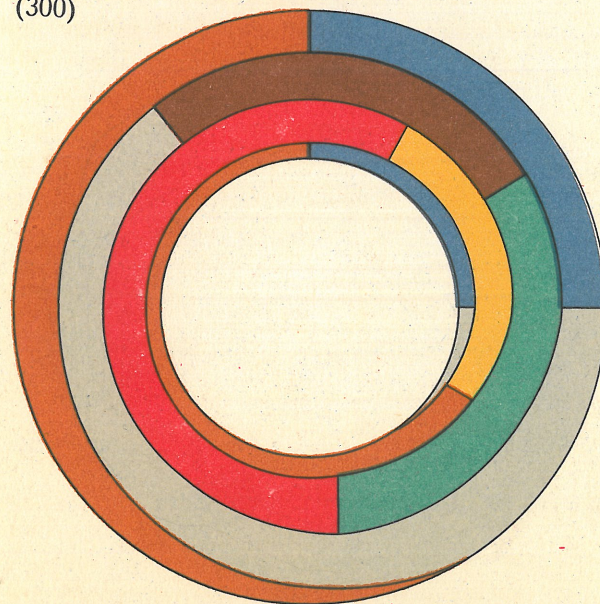
(299)

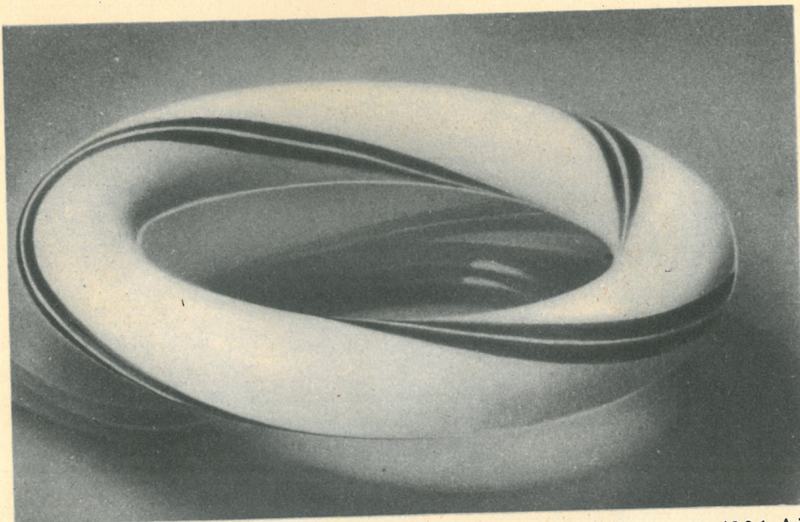
Wiadomo, że każdą mapę można pomalować czterema kolorami tak, by kraje sąsiadujące zawsze różniły się barwą. Tego dotychczas nie udowodniono, ale wszystkie próby wskazują, że tak jest. Na torusie (299), czyli na powierzchni o kształcie pneumatyku, trzeba aż siedmiu barw, bo można go tak podzielić na siedem krajów, że każdy z każdym będzie sąsiadował wzdłuż jakiejś granicy. Widok (300) torusa (czyli pierścienia), z góry i z dołu, pokazuje ów podział. Choć torus jest mniej pospolitą powierzchnią niż płaszczyzna i sfera, udało się udowodnić, że siedem barw zawsze na nim wystarcza. Udowodniono wprawdzie, że na płaszczyźnie i sferze wystarcza pięć, ale nie znaleziono przykładu, w którym by nie można się obejść bez piątej barwy.

Na torusie można narysować linię zamkniętą, która się nie przecina z sobą, a jest (301 A) lewym węzłem koniczynowym. Gdy przetniemy torus wzdłuż czarnej linii, czyli swego węzła, powstanie powierzchnia (301 B) dwustronna o dwóch krawędziach; są one zaplecione za siebie i obie są powtórzeniem pierwotnego wę-



(300)

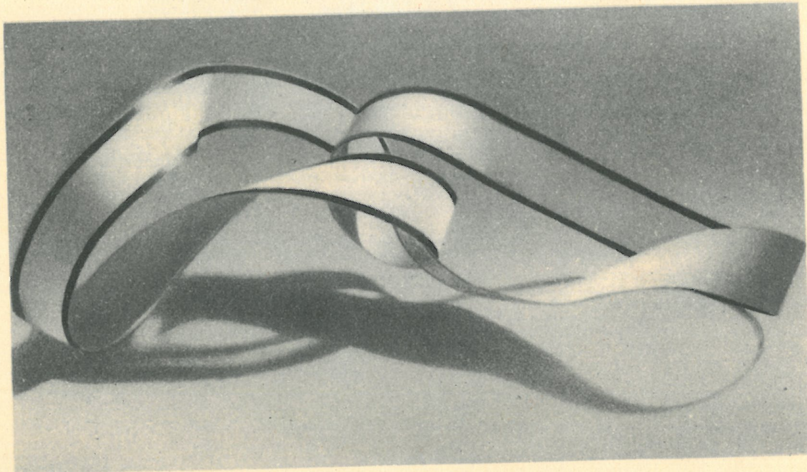


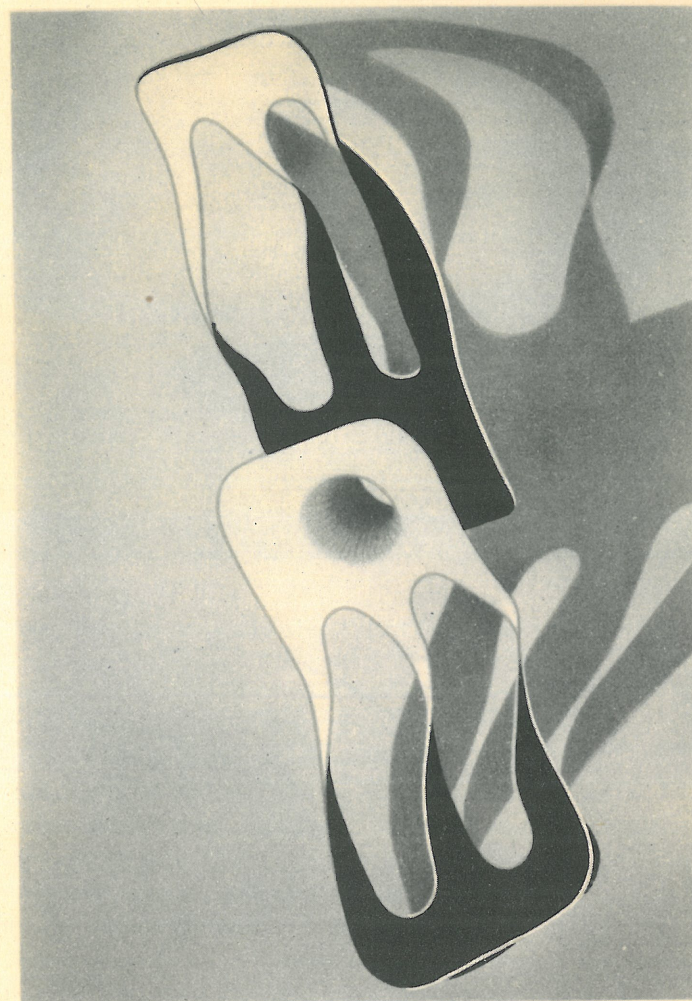


(301 A)

zła. Chcąc taką powierzchnię otrzymać wprost, musimy pasek papierowy skrócić o trzy pełne obroty (1080^0) i zwęźlić go przed sklejeniem.

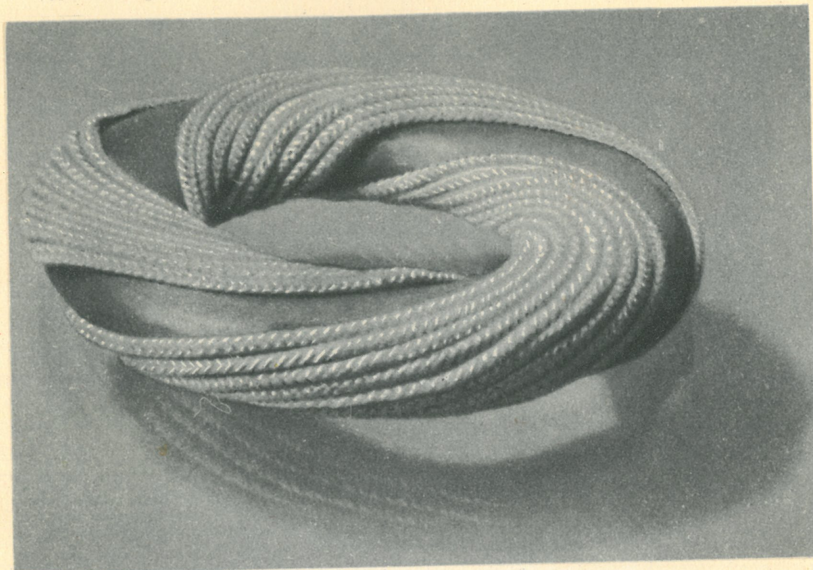
(301 B)



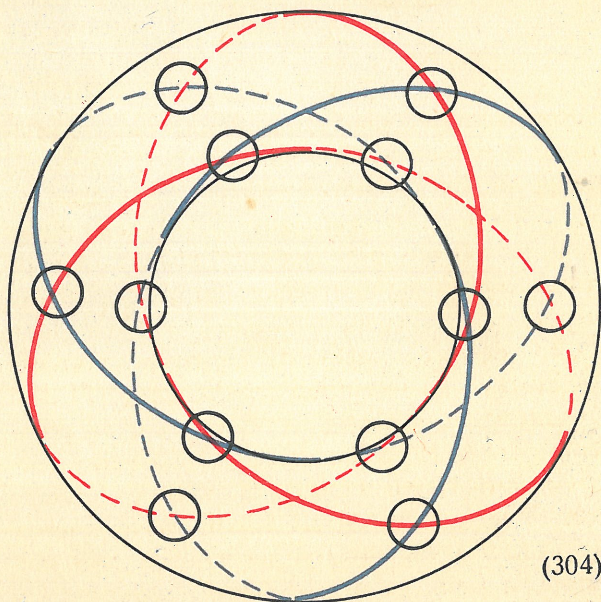


(302)

Dwustronną powierzchnię o dwóch brzegach zwęźlonych, ale nie zaplecionych, dostaniemy (302) przez spojenie rurą dwóch modeli typu już przedtem pokazanego na fotografii (298).

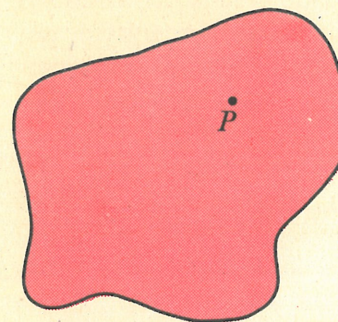


(303)

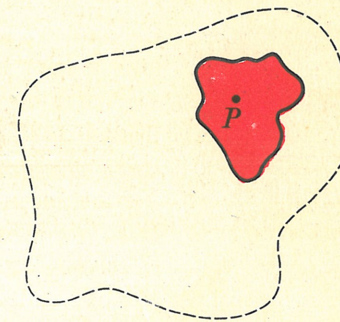


(304)

Można na torusie umieścić ile się chce węzłów (303) koniczynowych lewego typu (287) tak, by żaden nie przecinał siebie ani też żadnego innego z owej gromady. Jeżeli jednak umieścimy na torusie obydwa węzły koniczynowe, prawy i lewy, to (304) dadzą 12 przecięć.



(305 A)



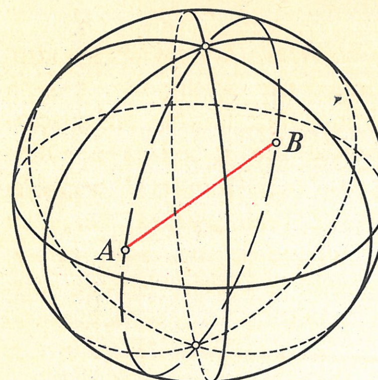
(305 B)

Rozciągnijmy płat gumy o dowolnym konturze, a potem puśćmy go tak, by (305 A, B) zbiegł się do pierwszego kształtu i znalazł na polu, które pokrywał, gdy był rozciągnięty; wówczas zawsze jakiś punkt P płata zajmie po skurczeniu to samo miejsce, co przy rozciągnięciu.

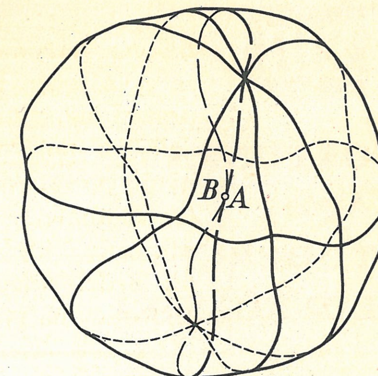
Oto dowód oparty na pewnym pomyśle W. Stożka i na własności szachownicy (21-23): Uważamy szachownicę za obszar, a Q za położenie punktu P po skurczeniu. Nazywamy pole czerwonym, jeżeli Q leży dla każdego P tego pola bliżej prawej strony niż P; jeżeli zawsze leży bliżej lewej strony, nazywamy pole zielonym, a pola, które nie są ani czerwone, ani

zielone, nazywamy żółtymi. Łatwo sprawdzić, że pola lewej kolumny nie są zielone, a pola prawej nie są czerwone. Nie trudno też sprawdzić, że pola czerwone nie sąsiadują z zielonymi, bo sąsiednie pola mają punkty P wspólne (co najmniej jeden). Z tego wynika, że jeżeli zakażemy królowi wchodzić na żółte pola, nie będzie mógł przejść z lewego brzegu szachownicy na prawy, a więc — w myśl własności (22-23) — wieża może przejść po żółtych polach z góry na dół. Wobec tego można narysować linię łączącą górny brzeg szachownicy z dolnym i wiodącą przez same żółte pola. Z każdego punktu P tej linii wystawimy strzałkę PQ. Te strzałki nie mogą się wszystkie wznosić (tzn. nie może być Q wyżej od P), bo punkt początkowy P drogi, po skurczeniu, nie może przejść w punkt Q poza szachownicą. Z podobnego powodu nie mogą wszystkie opadać. Kierunek strzałki zmienia się wzdłuż drogi w sposób ciągły, więc jest na drodze punkt P' taki, że $P'Q'$ jest poziome. Ale z określenia żółtego pola wynika, że w żółtym polu zawierającym P' jest także punkt P'' taki, że $P''Q''$ jest pionowe. Gdy pole jest małe, taka nagła zmiana kierunku nie jest możliwa, chyba, że PQ jest też małe dla wszystkich P w owym polu. Dzieląc obszar na n^2 pól i zwiększając n otrzymujemy w granicy punkt P_0 o strzałce P_0Q_0 znikający (to znaczy $P_0 \equiv Q_0$) — i punkt P_0 jest punktem, który przy skurczeniu pozostaje na miejscu.

Gdy zgnieciemy balon z elastycznego materiału w dowolny sposób go spłaszczając (bez rozrywania), to znajdą się antypody (306 A, B) A i B, które po spłaszczeniu padną na siebie.



(306 A)

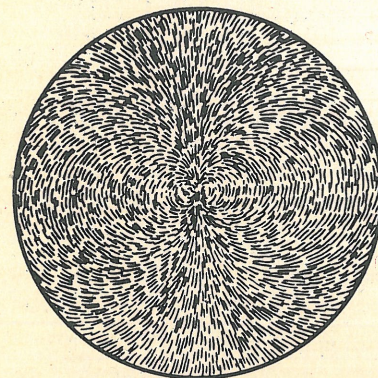


(306 B)

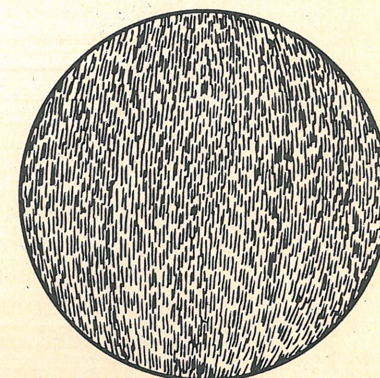
Z tego wynika ciekawy wniosek: w każdej chwili jest na Ziemi para antypod mających tę samą temperaturę i to samo ciśnienie barometryczne.

Kuli pokrytej włosami nie można nigdy całej gładko zaczesać; zawsze jest (307 A, B) co najmniej jeden punkt, w którym włosy utworzą wir bez określonego kierunku.

(307 A)

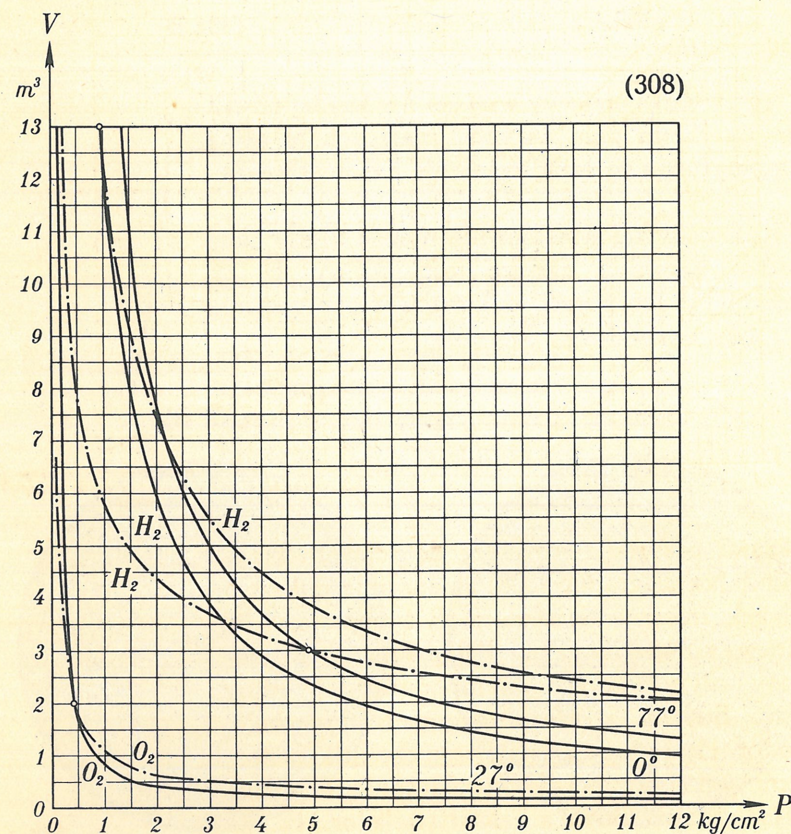


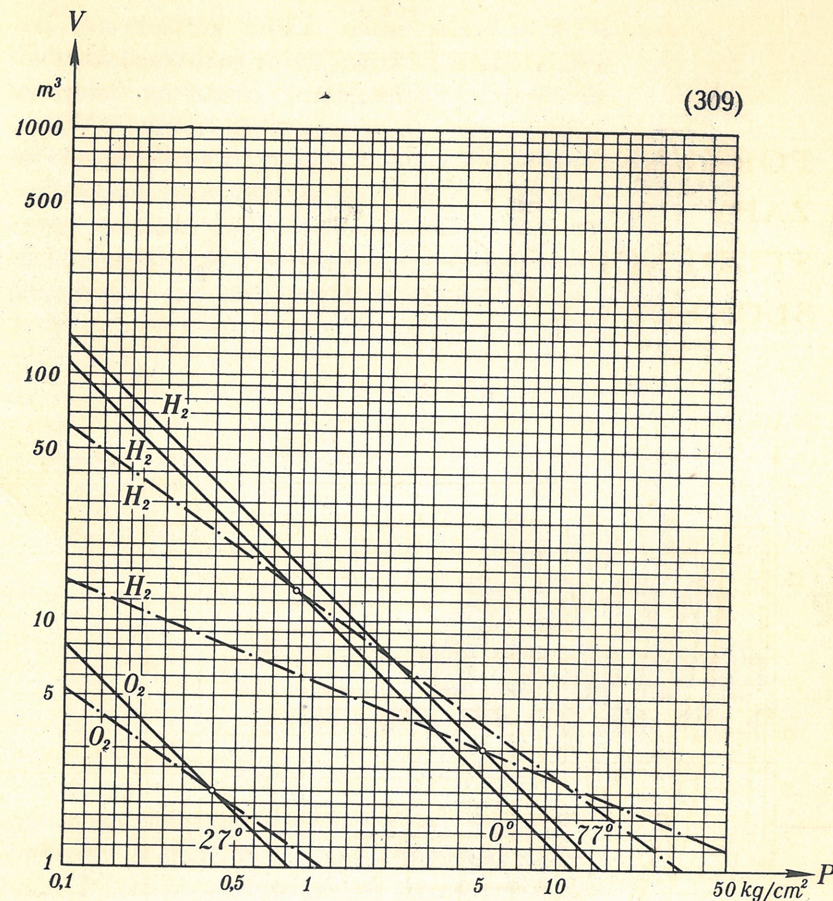
(307 B)



XIII

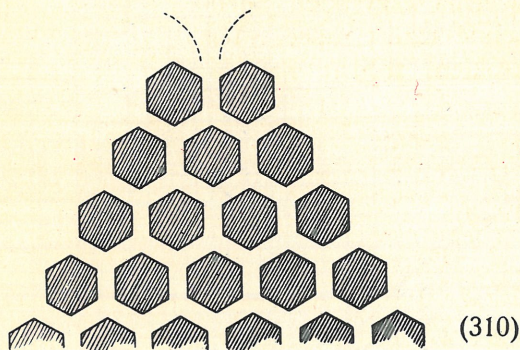
FORTUNKA
ŻABY
STUDENCI
SŁONECZNIKI





Prawa przyrody prowadzą do różnych krzywych. Na diagramie (308) zgięte linie pokazują związek między ciśnieniem P i objętością V jednego kilograma gazu. Pełne linie — to izotermy, czyli linie stałej temperatury. Według prawa Boyle'a i Mariotte'a są to hiperbole. Wodór H_2 jest przedstawiony dwiema izotermami: jedna odpowiada temperaturze 0^0, a druga 77^0. Prawo Boyle'a i Mariotte'a orzeka, że

$P \cdot V =$ liczba stała. Linie kropkowane powstają, gdy w pewnym stanie gazu (zaznaczonym na rysunku kółeczkiem) otoczymy naczynie powłoką nie przepuszczającą ciepła. Wtedy temperatura zmienia się wraz z ciśnieniem i dostajemy adiabaty; są to hiperbole uogólnione ($P^a \cdot V^b =$ liczba stała). Gdy zamiast zwykłych skal użyjemy dla P i V skal logarytmicznych *, wszystkie zgięte linie się wyprostują (309).



(310)

Rysunek (310) pokazuje sześcioboczne wysepki z kanalikami, które je oddzielają. Możemy sobie wyobrazić, że jest to plan miasta. Ludzie wchodzący wahają się na każdym rozwidleniu ulic, czy mają wybrać prawy, czy lewy kierunek. Z początku jest tylko jedna ulica, którą się wchodzi od północy do miasta i która wiedzie wprost na południe. Do następnych ulic *NS*, których jest dwie, wchodzi się wymijając wysepkę na lewo lub na prawo. Te dwie możliwości można oznaczyć przez 1, 1.

* Porównaj (76).

Teraz mamy już trzy ulice *NS* do wyboru. Tylko ten, kto już przedtem wybrał lewy kierunek, może wejść we wschodnią. Tę możliwość oznaczamy przez 1. Do środkowej ulicy można wejść dwoma sposobami: kto przedtem wybrał lewy kierunek, może teraz iść w prawo, a kto poszedł przedtem w prawo, może iść teraz w lewo. Do zachodniej ulicy można się dostać tylko jednym sposobem. W końcu 1, 2, 1 oznacza wszystkie możliwości. Dodając liczby sąsiednie: $1 + 2 = 3$, $2 + 1 = 3$, dochodzimy do 1, 3, 3, 1 jako oznaczenia wszystkich możliwości wejścia w następne cztery ulice. Tak budujemy krok za krokiem trójkąt Pascala:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Ostatni wiersz trójkąta pokazuje, ile jest sposobów dostania się do pierwszej, drugiej, ..., dziesiątej ulicy *NS* w dziesiątym rzędzie wysepek. Wszystkich tych sposobów razem jest

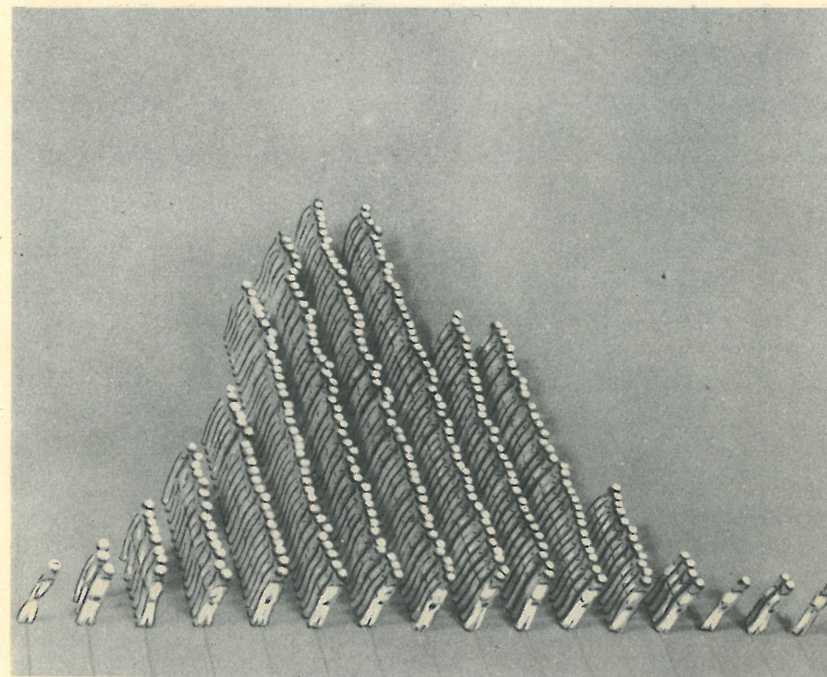
$$1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = \\ = 512 = 2^9.$$

Można uważać wzrost człowieka za wynik wielu przyczyn działających w ciągu jego rozwoju, a także podczas rozwoju jego przodków; jedne z nich wpływają na wzrost zmniejszająco, inne zwiększająco. Wyobraźmy sobie, że każdy człowiek losuje rzutem monety, czy ma wziąć od przyrody o cal więcej (orzeł) czy o cal mniej (reszka) niż to, co już dostał, i że wszyscy przed losowaniem mają równy wzrost. Jeżeli każdemu człowiekowi wolno losować dziewięć razy (albo rzucić od razu 9 monet, co wyjdzie na to samo) i jeżeli 512 ludzi to zrobi, to rezultat wypadnie prawdopodobnie taki, jakiego można się spodziewać znając sprawę wyboru ulic w mieście. Bo każdą stratę cala możemy uważać za decyzję ,,w prawo'', każdy zysk — za decyzję ,,w lewo''. Ponieważ jest 512 ludzi, więc możemy wyczerpać wszystkie możliwości wypisane w ostatnim wierszu trójkąta Pascala. Jeżeli wszystkie się urzeczywistnią, to będzie jeden człowiek o pięć cali mniejszy od średniego, 9 ludzi o cztery cale mniejszych, 36 ludzi o trzy cale mniejszych, ..., 126 ludzi o cal mniejszych, 126 ludzi o cal większych niż średni człowiek, 84 ludzi większych o dwa cale, ..., 1 człowiek większy o pięć cali ponad średnią miarę.

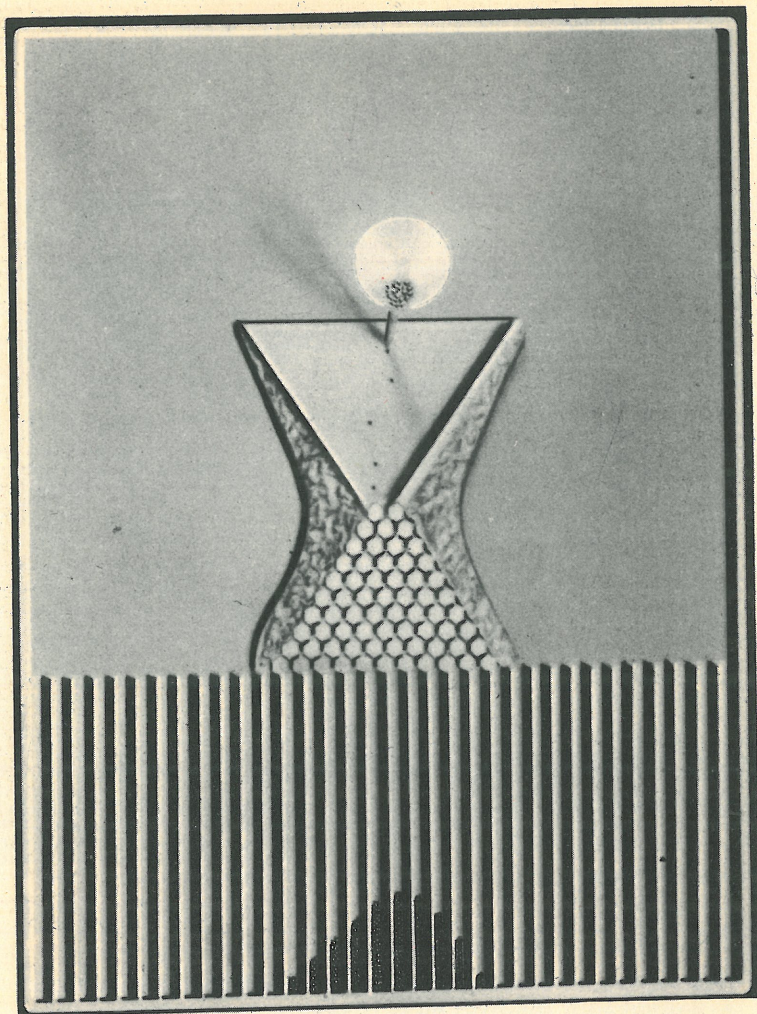
Gdy ustawimy ich tak, by najwyżsi stali w pierwszym rzędzie, mniejsi o cal — w drugim i tak dalej, to będzie 10 rzędów, a jeżeli będzie krycie na lewej flance, to prawe skrzydło utworzy krzywą określoną liczbami Pascala. Tę krzywą Gaussa można także wytyczyć biorąc po prostu liczby Pascala za rzędne.

Można też zgromadzić na przykład wszystkich studentów wstępujących na uniwersytet w jakimś terminie i ustawić ich (311) według wzrostu, tak jak to zrobiliśmy już z populacją wyobrażoną.

(311)

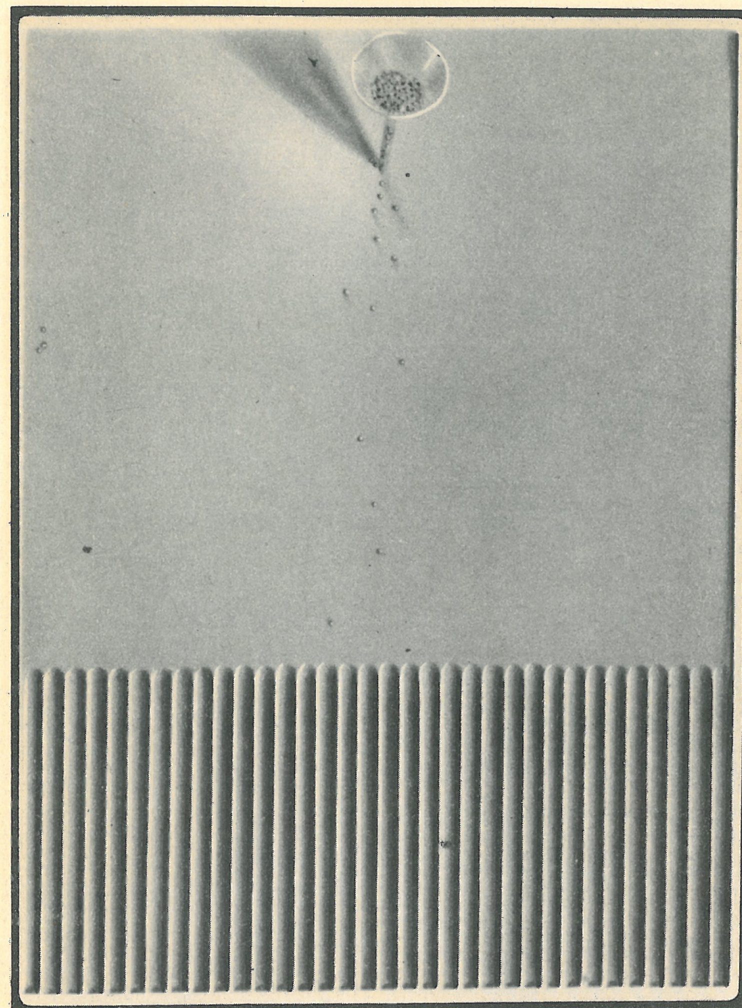


W końcu możemy sporządzić drewnianą fortunkę (312) z sześciobocznymi wysepkami i z kanalikami między nimi. Sypiąc śrut do górnego wejścia pochylonej fortunki rozdzielimy go pomiędzy przegródki umieszczone na dolnej krawędzi i sprawdzimy Gaussa prawo przypadku badając, czy kolumny śrutu w przegródkach są proporcjonalne co do wysokości do liczb Pascala. Ostatni eksperyment można



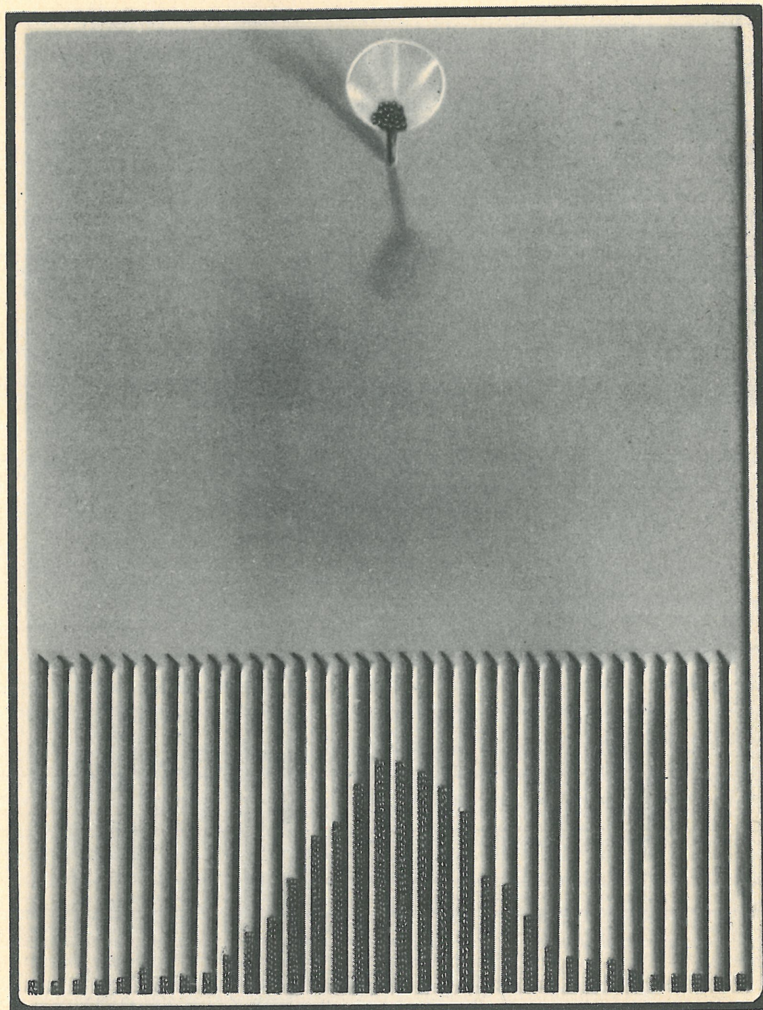
(312)

uprościć (313, 314) biorąc zamiast fortunki zwykłą deskę (dobrze jest pokryć ją suknem): sypie się śrut w jeden punkt i łapie w przegródki. To odpowiada nieskończenie wielu nie-



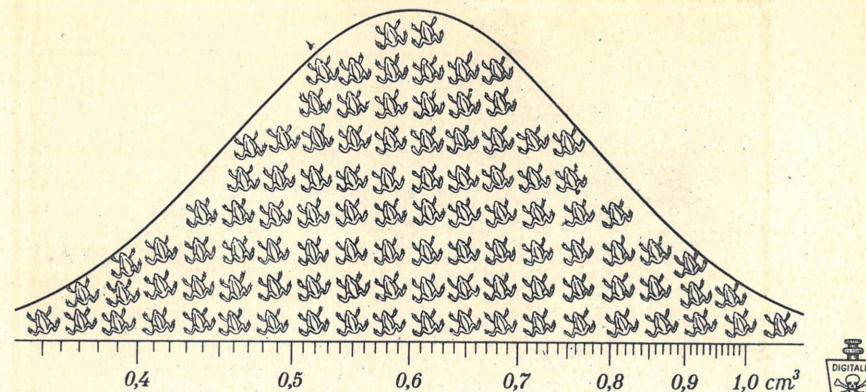
(313)

skończenie małym wysepkom. Dokładne prawo Gaussa, którego przybliżeniem jest trójkąt Pascala, zostało wyprowadzone matematycznie tylko dla nieskończenie wielu nieskończenie małych



(314)

przyczyn działających niezależnie; właśnie zwykła deska lepiej temu odpowiada. (Przegródki są konieczne, by kulki śrutu nadchodzące później nie rozpychały kulek wcześniej nadeszłych).



(315)

Eksperymenty Trevana na żabach poddawanych działaniu *digitalis* (naparstnicy) pokazały (315), że ze stu żab, którym wstrzyknięto jakąś dozę oznaczoną na dolnej skali (logarytmicznej)

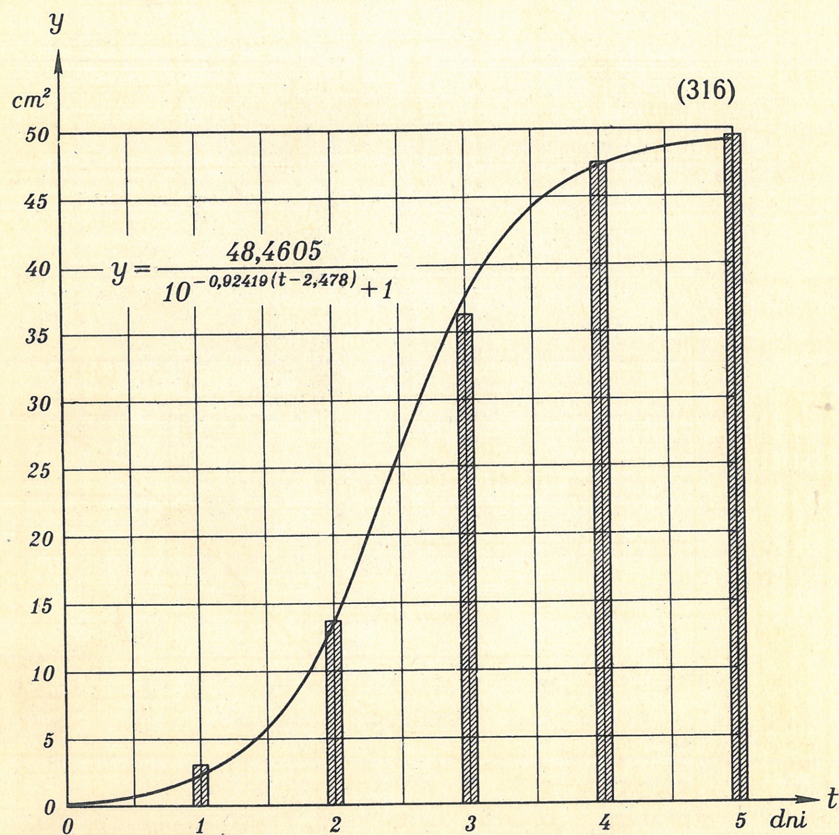
w stosunku do każdych 10 dkg żabiej wagi — zdycha tyle, ile ich jest na lewo od linii pionowej wskazanej przez tę dozę. Zastrzyk 0,4 cm³, na przykład, wystarczy w 6 przypadkach na 100, a zastrzyk 0,6 cm³ będzie zabójczy w 50 przypadkach na 100. (Ile potrzeba naparstnicy, by zabić 99 żab na 100?). Oczywiście liczby są uzyskane z wielu prób jako średnie.

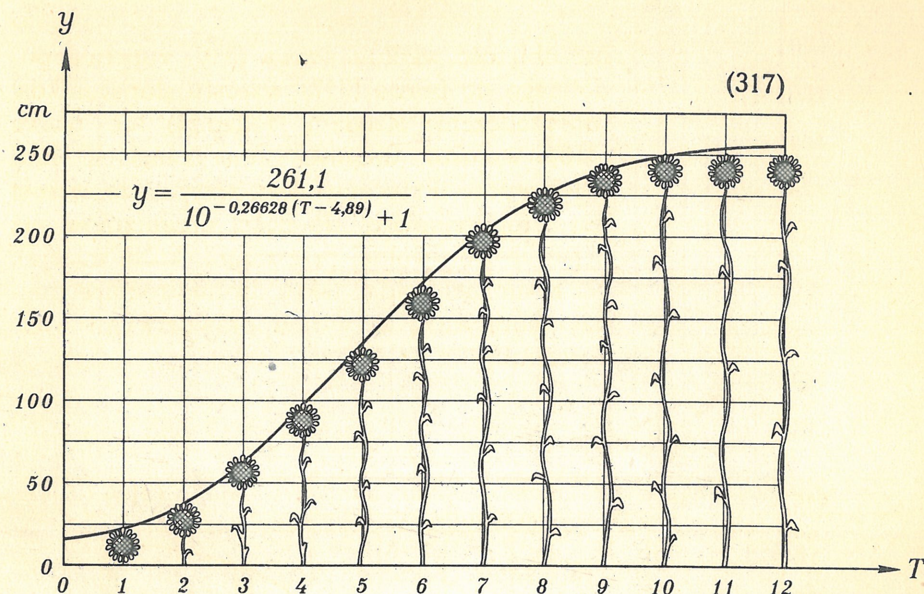
„Żabia krzywa" jest też krzywą Gaussa; jej równanie jest

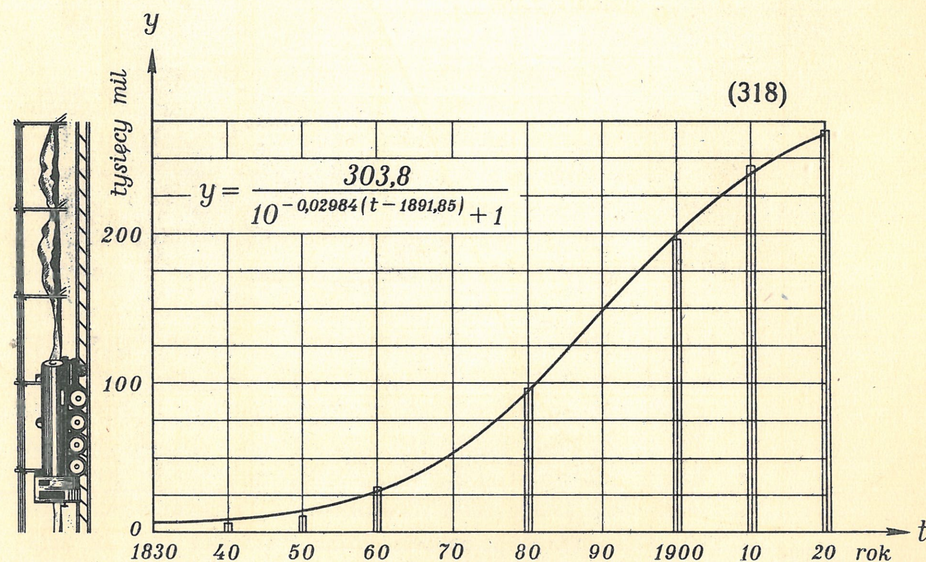
$$y = A \cdot 10^{c(x-b)^2} \quad (c \text{ jest ujemne}).$$

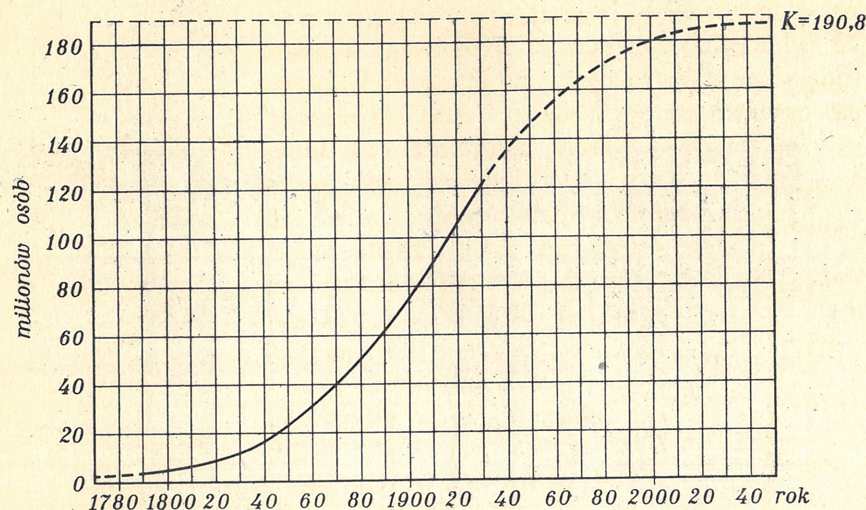
W zjawiskach związanych z rozwojem organizmów w ograniczonej przestrzeni znajdujemy krzywe innego rodzaju. Thornton odkrył, że bakterie chowane w zamkniętym naczyniu zwiększają z czasem zajmowaną przez

nie objętość według prawa (316) zupełnie podobnego do prawa (317) wzrostu słoneczników (doświadczenie Reeda i Hollanda) lub prawa (318) wzrostu długości amerykańskich linij kolejowych. Przyczyna leży w tym, że wzrost jest proporcjonalny do ilości organizmów już żyjących i do wolnej przestrzeni (która maleje). Na rysunkach widać także drobne różnice między teoretyczną krzywą a prawdziwymi wielkościami.









(319)

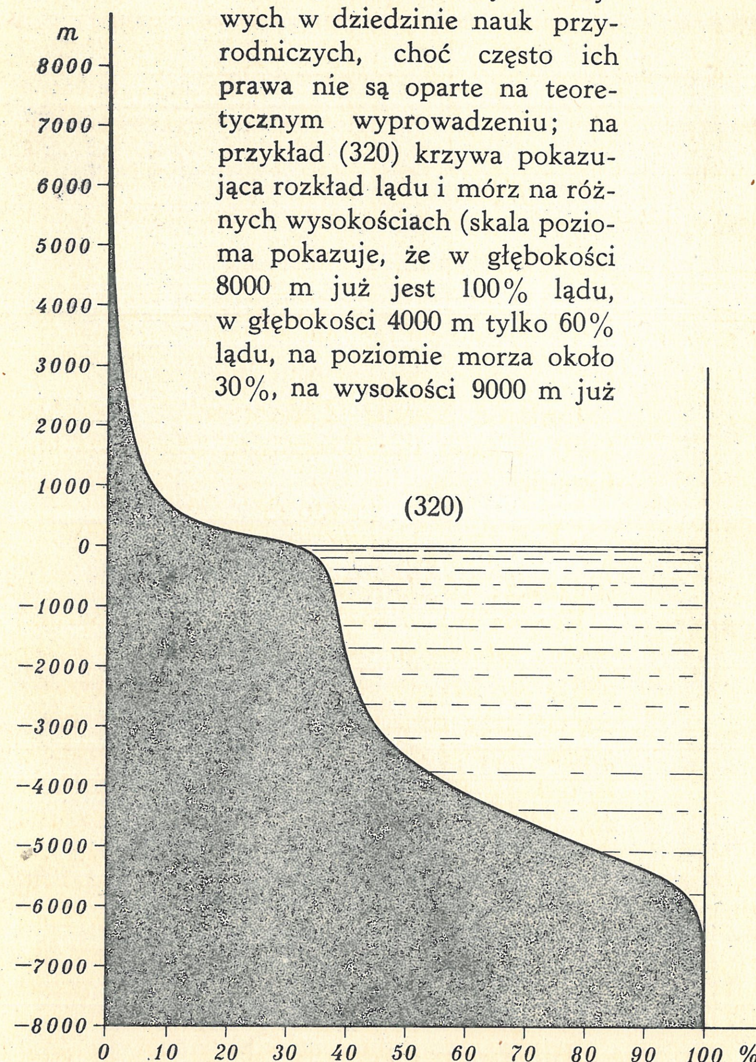
Ludność Stanów Zjednoczonych wykazuje (319) to samo prawo wzrostu; odpowiada ono formule

$$Y = \frac{190830{,}35}{1 + 10^{1{,}542035 - 0{,}0136265\,[t-1800]}} \cdot 1000$$

(t oznacza rok, Y — liczbę ludności).

Krzywa ma w pewnym punkcie przegięcie; można udowodnić, że górna granica, do której zbliża się krzywa, gdy czas rośnie nieograniczenie, leży dwa razy wyżej niż punkt przegięcia. Na tej podstawie statystycy przewidują, że ludność Stanów Zjednoczonych nie przekroczy 160 milionów. Według wzoru mogłaby dojść do 191 milionów. Różnica bierze się stąd, że trudno jest określić dokładnie miejsce, gdzie leży punkt przegięcia, bo prawdziwa krzywa składa się z osobnych punktów, nie dających się połączyć gładką linią o jednym punkcie przegięcia. Cokolwiek by można powiedzieć o takich przepowiedniach, faktem jest, że ustawy o ograniczeniu imigracji pojawiły się wkrótce po dojściu do punktu przegięcia, a także inne objawy potwierdziły, że przestrzeń okazała się ograniczona — i już to dało się odczuć.

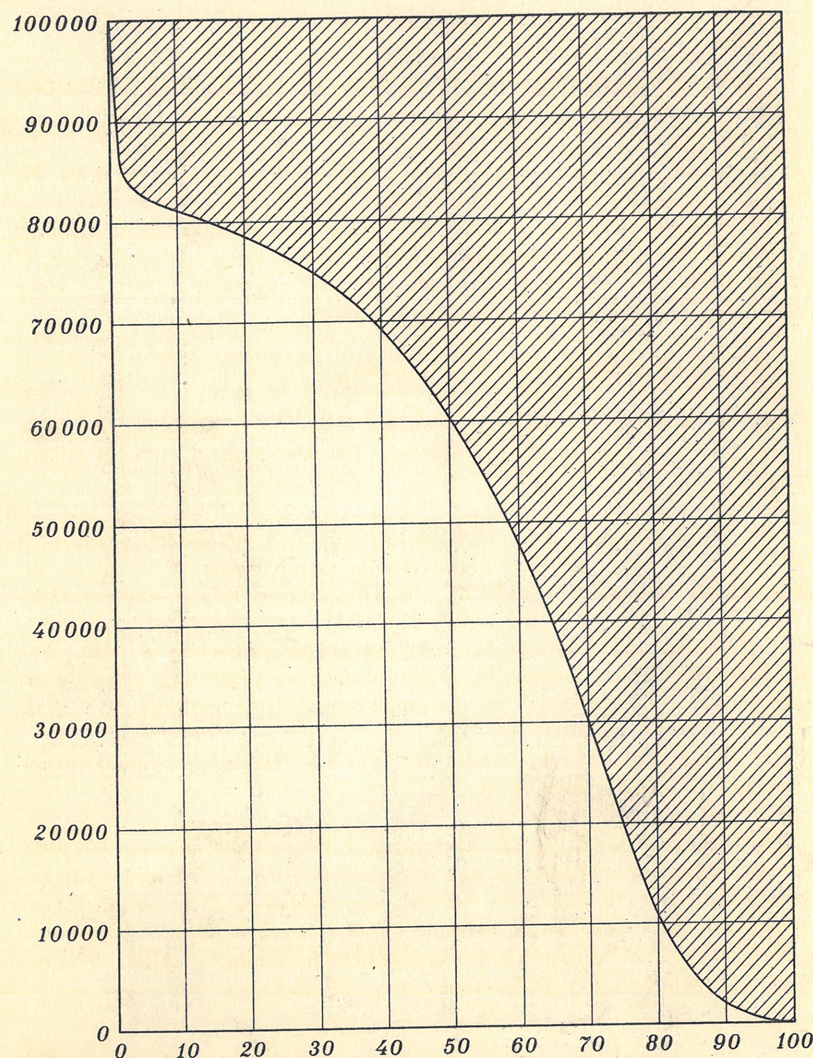
Mamy dużo różnych krzywych w dziedzinie nauk przyrodniczych, choć często ich prawa nie są oparte na teoretycznym wyprowadzeniu; na przykład (320) krzywa pokazująca rozkład lądu i mórz na różnych wysokościach (skala pozioma pokazuje, że w głębokości 8000 m już jest 100% lądu, w głębokości 4000 m tylko 60% lądu, na poziomie morza około 30%, na wysokości 9000 m już



(320)

jest 0% lądu, a 100% powietrza) — lub grafikon śmiertelności (321) mężczyzn w Stanach Zjednoczonych.

(321)



UWAGI

Liczba (*n*) na początku każdej uwagi oznacza rycinę lub tekst towarzyszący rycinie.

(1) H. E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, London 1917, str. 27.

(2) Pitagoras z Samos (582—507 przed n. e.), odkrywca twierdzenia o trójkącie prostokątnym, zajmował się parkietażami i teorią harmonii. Rozcięcie jest pomysłem hinduskim. Oryginalny rysunek ma napis „Patrz!", który przekonywa czytelnika lepiej niż słowny dowód.

(4) Pomysł profesora Jana Mikusińskiego.

(5) F. Morley, *On Reflexive Geometry*, Trans. Amer. Math. Soc. 8 (1907), str. 14—24; J. M. Child, *Proof of Morley's Theorem*. Math. Gazette 11 (1923), str. 171.

(6) T. Ważewski, Rocznik Polskiego Towarzystwa Matematycznego 18 (1945), str. 164, cytuje pewnego prawnika nazwiskiem Rappaport jako autora tej trysekcji. Błąd jest mniejszy niż 22′23″; dla kątów poniżej 30° jest mniejszy od 1′.

(7) Nie rozważaliśmy warunku, żeby wszystkie kwadraty były różne. Dodając do niego jeszcze żądanie, by żaden kwadrat nie przekraczał pewnej ustalonej wielkości, na przykład 1 m, utrudnilibyśmy zadanie wybitnie.

(8) Ten rozkład prostokąta podał Z. Moroń w Przeglądzie Matematyczno-Fizycznym 3 (1925), str. 152—3.

(9) Th. Willcocks podał ten rozkład w Fairly Chess Review 7 (1948). Pierwszy, który rozłożył kwadrat na różne kwadraty, był R. Sprague (Mathematische Zeitschrift 45 (1939), str. 607—8); jego rozkład ma 55 kwadratów. Niemożliwość rozkładu prostokąta na mniej niż 9 różnych kwadratów udowodnili H. Reichardt i H. Toepken w Jahresbericht d. Deutschen Math. Vereinigung 50 (1940), Aufgaben u. Lösungen, str. 13—14.

(10) H. E. Dudeney, książka (1), str. 27. J. Mikusiński podaje w Annałach Uniwersytetu Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie 1 (1946), str. 45–50, dowód graficzny; rysunek jest na str. 49.

(12) W. Ahrens podaje teorie różnych gier w *Mathematische Unterhaltungen und Spiele*, Lipsk, Teubner, 1910, I, str. 172–6.
The Theory of Games and Economic Behavior: w książce pod tym tytułem J. v. Neumann i O. Morgenstern poddali teorię gier gruntownej analizie logicznej i matematycznej. (II wydanie Princeton, 1947). Łatwiejszy wykład tej teorii daje J. C. C. McKinsey: *Introduction to the Theory of Games*, New York, McGraw-Hill, 1952.

(13) Dr J. Berger, Columbia Chess Chronicle, 1888.
Według analizy Władysława Hetpera najdłuższa obrona Czarnych jest taka:

	Białe	Czarne		Białe	Czarne
1.	Hb8	Gc4	8.	Kg3	Gf3
2.	He5	Ga6	9.	Hc1	Gh5
3.	He1	Gb5	10.	Ha1	Gg4
4.	Hc1	Gf1	11.	Hh8†	Gh3
5.	Hf4	Ga6	12.	H×Gh3†	Gh2
6.	Hg4	Gb7	13.	H×Gh2††	
7.	Hd1	Ge4			

(K = król, H = hetman = królowa = dama, G = goniec, × = bije, † = szach, †† = mat, *abcdefgh* oznaczają kolumny od lewej, 12345678 — wiersze od najniższego).

(14) W. Massmann, Neue Leipziger Zeitung, 1936. Ten problemat można znaleźć w książce: F. J. Prokop, *1000 auserlesene Schachaufgaben*, Praga 1944, nr 423.
W języku polskim mamy książkę M. Wróbla, *Tajemnice dwuchodówki*, Warszawa 1950. Jest to wyczerpująca oryginalna monografia o dwuchodówkach.

(15) Dr K. Ebersz, Magyar Sakkvilag, 1940. Analizę podali Duchamp i Halberstadt, *L'Opposition et les Cases conjuguées*, Paryż–Bruksela, Lancel et Legrand, 1930, str. 111, nr 244.
Torres y Quevedo skonstruował automat, który królem i wieżą daje mata królowi poruszanemu przez żywego partnera z dowolnej pozycji początkowej w minimalnej liczbie posunięć: Scientific American Supplement 6 (1915), str. 296. Dzisiejsza technika elektronowa daje znacznie większe możliwości: N. Wiener, Cybernetics, New York, Wiley, 1948.

(16) Książka (12), II, str. 226–260. Grę wynalazł podobno sławny szachista S. Loyd. Teorię podali W. Johnson i W. E. Story, American Journal of Mathematics 2 (1879), str. 397–404.
Po polsku nazwaliśmy tę grę „samotnikiem". Nie wiemy jednak, czy jest to właśnie ów „samotnik", który *Słownik Warszawski* określa słowami: „zabawka tak zwana widocznie dlatego, że jedna osoba bywa nią zajęta, bo właśnie trzeba cierpliwie a uważnie zastanawiać się nad kombinacjami w przekładaniu kulek". (Słownik języka polskiego, tom VI, Warszawa 1912).

(17, 18) Kategoryczność szachów i podobnych gier udowodnił pierwszy László Kalmár: *Zur Theorie der abstrakten Spiele*, Acta Litterarum ac Scientiarum R. Univ. Hungaricae, Sectio Sc. Math., Szeged, 4 (1928), str. 65–85.

(19) Euklides, jeden z największych matematyków wszystkich czasów, żył w Aleksandrii około 300 r. przed n. e. Stworzył pierwszy systematyczny wykład geometrii.
Że $2^{127} - 1$ jest liczbą pierwszą, stwierdził Fauquenbergue w roku 1917. D. H. Lehmer zbudował maszynę na zasadzie fotoelektrycznej, badającą podzielność olbrzymów liczbowych; pokazywano ją w r. 1933 na wystawie „A Century of Progress" w Chicago. Od tego czasu maszyny do rachowania zostały znacznie ulepszone, zwłaszcza dzięki wyzyskaniu wynalazku lamp elektronowych. Por. J. E. Littlewood, Math. Gazette 32 (1948), str. 163–171; W. Sierpiński, Matematyka, nr 3 (10), 1950, str. 12–20. J. C. P. Miller and D. J. Wheeler, Nature 168 (1951), str. 838. H. S. Uhler, Scripta Mathematica 18 (1952), str. 122–131. W. Sierpiński, Matematyka, nr 1 (29), 1954, str. 3.

(21) W. W. Rouse Ball, *Mathematical Recreations and Essays*, London, Macmillan & Co., 1939, str. 165 i 171. Także książka (12), str. 225 i 293.

(22, 23) A. Hulanicki, student Uniw. Wrocławskiego, znalazł nietrudny dowód twierdzenia o polach zaminowanych i ogłosi go w Wiadomościach Matematycznych.

(23) Książka (1), str. 102–3; książka (12), str. 381. Konikówkę ułożył rosyjski oficer Jaenisch, Chess Monthly, 1859.

(24) Leonhard Euler z Bazylei (1707—1783) napisał kilkaset rozpraw ze wszystkich niemal dziedzin matematyki wyższej i elementarnej.

Niemożliwość ustawienia 36 oficerów udowodnili Fisher i Yates, Proc. Cambridge Phil. Soc. 30 (1944), str. 492—507; por. także: Bruck i Ryser, Canadian Journ. of Math. 1 (1949), str. 88—93.

(25) R. A. Fisher, *The Design of Experiments*, Edynburg 1947.

(26) Platon (429—348 przed n. e.), uczeń Sokratesa, mówi o niewymierności $\sqrt{2}$ i innych liczb.

(29) Blaise Pascal (1623—1662), geometra i filozof, wynalazca barometru, i maszyny do rachowania oraz odkrywca rachunku prawdopodobieństwa, zastosował indukcję matematyczną w swoim *Traité du triangle arithmétique*.

F. Maurolico (1494—1575) uprzedził go o cały wiek, ale jego dzieło poszło w niepamięć.

(30) Jest stos kopert zaklejonych. W każdej jest list takiej treści: „Otwórz następną kopertę, przeczytaj list i wykonaj, co ci jego treść każe". Na pierwszej kopercie jest napis: „Otwórz tę kopertę, przeczytaj list i wykonaj, co ci jego treść każe". Zasada indukcji matematycznej stwierdza, że kto zgodzi się być posłusznym rozkazowi wypisanemu na pierwszej kopercie, będzie musiał otworzyć wszystkie koperty.

(31) Józef W. Reiss, *Elementarz muzyczny*, Warszawa 1949.

L. Euler traktował (r. 1739) ściśle matematycznie zagadnienie gamy i zwrócił na to uwagę, że akord jest tym lepszy, im mniejsze liczby określają stosunek drgań. Claudius Ptolemaeus z Aleksandrii (r. 140 n. e.) przyjął obok oktawy, kwinty i kwarty dużą tercję 5 : 4 za podstawę gamy diatonicznej o interwałach 9/8, 10/9, 16/15, 9/8, 10/9, 9/8, 16/15. Tu wszystkie akordy, nie wyłączając małej tercji, wyrażają się liczbami niżej dziesiątki, ale sekundy są nierówne: raz 9/8, raz 10/9. Na fortepianie tak nastrojonym utwór w tonacji D-dur brzmiałby inaczej niż w tonacji C-dur.

Skalę temperowaną wprowadził organista Andreas Werckmeister w r. 1691.

Co do teorii, por.: Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*, London 1894—6. J. Mikusiński zbadał możliwości ulepszenia skali muzycznej; Problemy, 1954.

(33) A. Zeising (1854) w książce *Neue Lehre von den Proportionen des menschlichen Körpers* przypisuje złotemu podziałowi przesadne znaczenie.

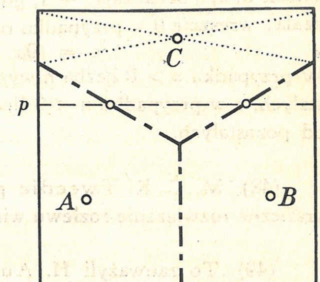
(34) L. Fibonacci żył w Pizie około roku 1200.

Pomysł drzewa powstał z innego, który podał E. Żyliński na kongresie matematycznym w Bolonii: Atti del Congr. Bol. 4 (1928), str. 153—6. Por. także: Acta Soc. Botanicorum Poloniae 5 (1928), str. 380—91, gdzie D. Szymkiewicz dyskutuje rolę liczb Fibonacciego w botanice — tak zwane *prawo Ludwiga*.

(35) Plan pałacu w Rzymie, zwanego Palazzo della Cancellaria.

(37) W (37) pole nadzorowane przez C wynosi 1/8 całego; w (38) jest już 1/4. Punkt zejścia się trzech pól jest (1/2, 5/8), jeżeli (0, 0) i (1, 1) są przeciwległymi wierzchołkami pastwiska. W (39) punkt wspólny jest (1/2, 13/24). W (40) najdłuższa jazda A jest 505/48, C — 601/48, a punkt wspólny — jak w (39).

P. Leon Bankoff z Los Angeles proponuje w The American Math. Monthly 59 (Nov., 1952), str. 634—5 inne rozwiązanie, którego szkic tu podajemy: trójkąt ABC jest równoboczny a przedłużenia jego trzech wysokości poza środek dzielą kwadrat na trzy równe pola, każde powierzone innemu pasterzowi — (zaczyna się konstrukcję od linii pomocniczej pq dzielącej kwadrat na dwa prostokąty w stosunku 2 : 1, a potem przez środki połów tej linii kreśli się linie ukośne pod kątem 30^0 do niej a w końcu znajduje wierzchołek C na przecięciu linij kropkowanych). Ten podział: (I) zrównuje pola, (II) zrównuje najdłuższe jazdy, (III) powierza każdy punkt pastwiska najbliższemu pasterzowi, ale nie ma zalety (IV) ustawienia każdego jeźdźca według zasady możliwego skrócenia do minimum najdłuższej jego jazdy. Z naszych pięciu rozwiązań tylko pierwsze, tj. (36), ma wszystkie cztery zalety I—IV; (37) ma II i IV; (38) ma II, III i IV; (39) ma I, II i IV; (40) ma I i III. P. Bankoff uważa jednak swoje rozwiązanie za ulepszenie podziału (36), bo jego podział daje krótsze maksymalne rajdy niż (36). Ale i tak nie jest wyłączone, że spośród podziałów spełniających warunki I—IV podział (36) daje najkrótsze maksymalne rajdy! Czy Czytelnik rozumie sens tej kwestii?



(42) J. Schreier, Mathesis Polska 7 (1932), str. 154—160.

(44) $[x]$ oznacza tu największą liczbę całkowitą nie przewyższającą x. Tak więc $[5,7]$ oznacza 5, $[6]$ oznacza 6.

(45) J. Słupecki, Colloquium Mathematicum 2 (1951), str. 286—290.

(47) C. A. B. Smith, The Math. Gazette 31 (1947), nr 293, str. 31—9. Blanche Descartes podała prostszy sposób (Eureka nr 13, Oct. 1950). Nasz rysunek jest graficznym opracowaniem pomysłu tej autorki.

A. M. Rusiecki podał inny sposób wykrycia fałszywej monety za pomocą trzech ważeń, przy czym wiadomo, że wśród czternastu monet 0, 1, 2, ..., 13 jest jedna moneta fałszywa (cięższa albo lżejsza od pozostałych) i że tą monetą nie jest 0. Wyznaczamy za pomocą wagi trzy różnice, przy czym za każdym razem kładziemy na każdej szali po 5 monet:

$$a = (0,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12) - (5,\ 7,\ 9,\ 11,\ 13),$$
$$b = (2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 12) - (0,\ 3,\ 6,\ 11,\ 13),$$
$$c = (0,\ 4,\ 5,\ 10,\ 11) - (1,\ 2,\ 7,\ 8,\ 13).$$

Niech a, b, c oznaczają: $+1$, gdy przeważa lewa szala; -1, gdy przeważa prawa szala; wreszcie 0 w przypadku równowagi. Obliczmy

$$n = (9a + 3b + c)\,(-1)^{a+b+c}.$$

W przypadku $n > 0$ liczba n wyznacza numer monety, która jest cięższa od pozostałych, a w przypadku $n < 0$ liczba $-n$ jest numerem monety, która jest lżejsza od pozostałych.

(48) M. C. K. Tweedie podał w Math. Gazette 23 (1939), str. 278—82, graficzne rozwiązanie rozlewu wina; nasza rycina jest transformacją jego pomysłu.

(49) To zauważyli H. Auerbach i St. Mazur.

(50) Br. Knaster i H. Steinhaus, Rocznik Pol. Tow. Mat. 19 (1946), str. 228—31.

H. Steinhaus, *The Problem of Fair Division*, Econometrica 16 (1948), str. 101—104.

(53) G. Pólya, L'Enseignement Mathématique 4 (1919), str. 355—379.

Że suma odległości od boków trójkąta równobocznego jest stała, udowodnił Viviani.

Zmiana kierunku strzałki odpowiadałaby założeniu, że naprzód odbyły się wybory, które dały punkt wyższy i wynik (1, 2, 2), a potem te, które dały punkt

niższy i wynik (2, 2, 1.) Teraz partia A traci głosy i zyskuje mandat wbrew temu, co powiedzieliśmy w tekście. Rozwiązanie trudności: powiedzieliśmy, że nigdy nie może się zdarzyć, żeby mandat stracony przez partię, co zyskała głosy, przypadł tej co straciła, ale nie powiedzieliśmy, że w ogóle partia tracąca głosy nie może zyskać mandatu: odwrócona strzałka oznacza, że partia A zyskuje mandat, który traci partia C, która też straciła głosy. Nie ma więc sprzeczności, bo partia tracąca głosy może zyskać mandat, ale jest to mandat innej partii, która też straciła głosy.

(54) Porównaj (2).

(74, 75) Kwestia podobna do (264). Autor zadał ją swoim studentom i otrzymał odpowiedź od K. Florka i innych.

(75, 76) Zasadę suwaka logarytmicznego podał E. Gunter w r. 1623. W r. 1671 S. Partridge wymyślił przyrząd podobny do współczesnego suwaka.

Gdy iloczyn pojawia się poza zasięgiem skal, trzeba ustawić 10, a nie 1, naprzeciw mnożnika.

(77) H. Steinhaus, *O różnych skalach funkcyjnych i ich zastosowaniu*, Parametr 2 (1935), str. 1—12.

Twórcą nomografii jest M. d'Ocagne (1884).

(78, 79) Prawo soczewki odkrył w r. 1693 słynny astronom Edmund Halley (1656 — 1724).

(80) M. Mersenne (1588—1648) doszedł drogą doświadczalną do wzoru na częstość drgań struny napiętej. Wzór jest ważny dla jednostek centymetr-gram-sekunda. Gdy siła P jest podana w gramach jako w jednostkach ciężaru, to trzeba przed wstawieniem we wzór pomnożyć ją przez 981.

(81) G. Pick, *Geometrisches zur Zahlenlehre*, Ztschr. d. Vereines Lotos, Praga 1899.

H. Steinhaus, *O polu figur płaskich*, Przegląd Mat.-Fiz., 1924.

Jak wyglądałaby ta reguła w przestrzeni?

H. F. Blichfeldt, Trans. of the American Math. Soc. 15 (1914), str. 227—35.

(84, 85) M. Warmus, Colloquium Mathematicum I, 1 (1947), str. 45–6.

(85) H. Minkowski, *Geometrie der Zahlen*, Lipsk, Teubner, 1912. Uproszczony dowód: Hilbert i Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie*, Berlin, Springer, 1932. Książka ta zawiera piękne rysunki i fotografie.

(86) Zagadnienie to postawił i rozwiązał G. Pólya. Nasza droga do rozwiązania jest odmienna.

(88) W. Sierpiński, Bulletin de l'Acad. des Sciences de Cracovie, A. (1912), str. 463–78.
Włoski matematyk G. Peano pierwszy odkrył takie krzywe.

(94) Sznirelman. Uspiechi Matematiczeskich Nauk 10 (1944), str. 34–44. Jest to przedruk pracy znacznie wcześniejszej.

(95, 96) H. Steinhaus, Mitt. der Sächsischen Akademie 82 (1930), str. 120–30.
Przegląd Geograficzny 21 (1947) daje notę tegoż autora, gdzie średnią stromość obszaru oblicza się ze wzoru $\tan g = h \Sigma L_i / B$, gdzie B jest polem obszaru, h — pionowym odstępem poziomic, L_i — długością i-tej poziomicy, a g — stromością. L_i oblicza się z przecięć poziomic przez siatkę równoległych.
Porównaj artykuł tegoż autora w Sprawozdaniach Wrocławskiego Towarzystwa Naukowego 4 (1949), dodatek 5, gdzie określono długość rzędu n, proponując wprowadzenie tego pojęcia do geografii.

(102A, 102B) Włoski geometra L. Cremona i angielski fizyk J. C. Maxwell wymyślili około r. 1875 *statykę graficzną*, opartą na własnościach figur odwrotnych. Dzięki temu uprościło się obliczanie konstrukcji żelaznych, takich jak na przykład wieża Eiffla.

(104, 105) I. Grochowska, *Czynniki ekologiczne i rozmieszczenie geograficzne wątrobowców Beskidu Śląskiego*. Polska Akademia Umiejętności, Wydawnictwa Śląskie, Prace Biologiczne nr 2 (1950), str. 1–72.
W. Stęślicka-Mydlarska, *Stanowisko systematyczne człowieka z Ngan-Dong*. Ann. Uniw. M. C.-S., Sectio C; II, 2 (1947), str. 37–109+I–VIII.
Ta metoda jest dziełem Ogólnej Grupy Zastosowań w Państwowym Instytucie Matematycznym i nazywa się *taksonomią wrocławską*.

(106) Apollonius z Pergae (170–100 przed n. e.) studiował własności przecięć stożkowych.

(108) M. Warmus dał w Roczniku Pol. Tow. Mat. 19 (1946), str. 233–4, to rozwiązanie bez dowodu.

(109) A. Zięba podał to rozwiązanie bez dowodu (nie ogłoszone). Jego artykuł o pościgu ukaże się w II tomie kwartalnika *Zastosowania Matematyki*.

(112) René Descartes, twórca geometrii analitycznej, wspomina o tej linii spiralnej w liście do Mersenne'a w r. 1638.
Spirala logarytmiczna pojawia się w przyrodzie, gdy organizm rośnie zachowując stale podobieństwo do postaci, którą miał w stadiach poprzednich.
Por.: D'Arcy W. Thompson, *Science and the Classics*, Oxford, Univ. Press, 1940, str. 114–47.

(113) Równanie tej spirali jest $r = ae^{c\varphi}$ ($e = 2{,}71828\ldots$, $c = 0{,}274411\ldots$, a jest dowolne). Tu r jest odległością od wiru, a φ jest kątem względem ustalonego kierunku.
Kurs okrętu zawiera kąt 74°39′12″ z linią okręt-wir.

(115) Archimedes (287–212 przed n. e.), jeden z najznakomitszych matematyków starych i nowych czasów, obliczył stosunek obwodu koła do średnicy z dokładnością do trzeciego miejsca dziesiętnego, znalazł prawa pływania ciał i stworzył początki matematyki wyższej.
Por.: W. W. Rouse Ball, *A short Account of the History of Mathematics*, London, Macmillan & Co., 1935.

(116) H. T. Brown, *507 Mouvements mécaniques*, Liège, Deséer, str. 28, nr 96 i nr 97.

(117) Peaucellier, oficer marynarki francuskiej, odkrył ten mechanizm w r. 1864. Uprzedził go Sarrut, który zaatakował to zagadnienie z innej strony. Patrz: Comptes Rendus de l'Académie, 36 (1853), str. 1036.

(120) L. Mascheroni, *Geometria del Compasso*, Pawia 1797. Napoleon I czytał tę książkę.

G. Mohr (*Euclides Danicus*, Amsterdam, 1672) uprzedził Mascheroniego w konstrukcjach samym cyrklem, ale poszedł w zapomnienie.

Porównaj R. Courant i H. Robbins, *What is Mathematics?* Oxford Univ. Press, rozdział III, str. 5.

(121) H. Rademacher i O. Toeplitz, *Zahlen und Figuren*, Berlin, Springer, 1930, str. 164.

(122) Ks. Adam Adamandy Kochański ogłosił tę konstrukcję w Acta Eruditorum w r. 1685. On pierwszy użył sprężyny stalowej do zawieszenia wahadła zegarowego.

(124) Pisali o tym A. H. Stone i J. W. Tukey, Duke Math. Journal 9 (1942), str. 356—9 i H. Steinhaus, Fundamenta Mathematicae 33 (1945), str. 245—63.

(128) Mikołaj Kopernik (1473—1543), wielki astronom, udowodnił, że planety krążą dokoła Słońca i że Ziemia też podlega temu prawu. Jego dzieło *De revolutionibus orbium coelestium* ukazało się w r. 1543.

(129) Jan Bernoulli, jeden z twórców wyższej analizy matematycznej, urodzony w r. 1667, postawił w r. 1696 problemat *brachistochrony*, czyli linii najkrótszego spadku, i rozwiązał go w następnym roku.

Szybkość kątowa ω koła, jego promień r i przyśpieszenie g siły ciężkości są związane wzorem $g = r\omega^2$.

(134) Immanuel Kant, filozof niemiecki (1724—1804).

(135) Por. książkę (28), VII, § 8.

(137) Por. książkę (121).

(139) Zadanie postawione w Związku Radzieckim uczniom szkół średnich. Patrz: Uspiechi Matematiczeskich Nauk 2 (1948), nr 2 (24), str. 239.

(140) K. Zindler, *Über konvexe Gebilde*, II, Monatshefte f. Math. u. Phys. 31 (1921) str. 25—9, zauważył, że są inne krzywe niż koło, których cięciwy połowiące obwód przepoławiają zawsze pole.

H. Auerbach, *Sur un probleme de M. Ulam concernant l'équilibre des corps flottants*, Studia Mathematica 7 (1938), str. 121—2.

(141) Por. (29), (20).

Nikomedes żył około r. 200 przed n. e.

(144) Por. książkę (120).

(145) Obraz przedstawiający Powrót Ulissesa namalował Bernardino Pinturicchio (1454—1513). Oryginał w National Gallery w Londynie; reprodukcja autoryzowana.

(150) H. Steinhaus, *Sur la localisation au moyen des rayons X*, C. R. de l'Acad. des Sciences, 206 (1938).

O optycznej lokalizacji przedmiotów i pewnym jej zastosowaniu: Archiwum Lw. Tow. Naukowego III, 9 (1938), str. 335— 343. Urząd Patentowy Rzeczypospolitej Polskiej, patent nr 34108, zgłoszony 8. 3. 1938, udzielono 29. 4. 1950.

(154, 155) Pomysł Jana Mikusińskiego.

(159) K. W. Pohlke odkrył to twierdzenie w r. 1858 i ogłosił w r. 1860 bez dowodu. Elementarny dowód podał H. A. Schwarz w Journ. f. reine u. angewandte Mathematik 63 (1864), str. 309— 314.

(161) Gdy obraca się szybko taki model, pojawiają się ciemne linie o nieoczekiwanym przebiegu. Są to miejsca pozornych przecięć krawędzi.

(171) M. Brückner, *Vielecke und Vielflache*, Lipsk, 1900, str. 130. Cosinus ostrego kąta rombu jest 1/3.

(181) A. Łomnicki, *O wielościanach umiarowych*, Bibl. Matematyczna Książnicy-Atlasu, nr. 9.

H. S. M. Coxeter, *Regular Polytopes*, New York 1949, str. 22.

Objętości pięciu brył platońskich o krawędzi a są:

$$a^3\sqrt{2}/12,\ a^3,\ a^3\sqrt{2}/3,\ a^3(15+7\sqrt{5})/4,\ 5a^3(3+\sqrt{5})/12.$$

(201) O najszczelniejszym rozmieszczeniu równych kul w przestrzeni pisał St. Kulczycki; Młody Matematyk, dodatek do czasopisma Parametr, 1931, nr 4-5, str. 61—69.

(208) Ściany tego dwunastościanu nie mogą być pięciobokami foremnymi, gdyż byłoby to niezgodne z zasadami krystalografii.

Porównaj drugą książkę (181), str. 63.

(212) Jak wyżej, str. 69.

(216) Jak wyżej, str. 96.

(218) Fotografia Księżyca (odwrócona przez teleskop) została zdjęta przez Obserwatorium Paryskie 26 kwietnia 1898 r. o godz. 19^h09^m.

(219) Zauważył M. Warmus.

(221) G. Mercator (1512—94).

Nie ma rzutów zachowujących długości.

(227—230) Trzeci stożek znalazł R. Nowakowski.

Zenobia Mazurówna znalazła jeszcze wiele innych stożków. np. powstałe z parkietażu trójkątowego (58) lub z nałożenia dwóch parkietaży kwadratowych. Matematyka nr 1 (29), 1954 r.

(244) Równanie krzywej jest $y = a \sin bx$.

Funkcję sin wprowadził w II wieku n. e. wielki astronom aleksandryjski Ptolemeusz.

(247) Elektrokardiogram zdjęty przez dr H. Kowarzyka, prof. Wrocławskiej Akademii Medycznej.

(248) Porównaj (106).

(251) Prawa obiegu planet odkrył w roku 1609 J. Kepler (1571—1630).

(258) Gdy $(a : b) : (c : d)$ ma stałą wartość inną niż 1, otrzymamy hiperboloidę paraboliczną inną niż w tekście.

(261) Ta powierzchnia minimalna nazywa się katenoidą.

Każdy kontur zanurzony w mydlinach da najmniejszą powierzchnię, jaką można na nim rozpiąć

C. V. Boys, *Soap Bubbles*, Romance and Science Series, London, 1924, A. 5. (Jest polski przekład.) Tamże przepis na mydliny.

(263) E. Minding (1806—85) odkrył tę „anty-kulę", a F. Beltrami (1835—1900) zauważył, że istoty żyjące na niej uznałyby za naturalną geometrię Łobaczewskiego z sumą kątów w trójkącie mniejszą od 180^0.

N. Łobaczewski (1793—1856) i J. Bolyai młodszy (1802—60) odkryli, że są możliwe niesprzeczne geometrie różne od euklidesowej. Porównaj książkę (28), IV, § 9.

(264) Por. drugą książkę (181), str. 5—12.

Gdyby jeden koniec nowej linii leżał w jednym z danych wierzchołków, a drugi koniec tworzył nowy wierzchołek na jednej z danych linij, to V przyrosłoby o 1 i S przyrosłoby o 1, natomiast L przyrosłoby o 2 i wzór $V + S = L + 1$ pozostałby prawdziwy. A gdyby oba końce nowej linii tworzyły nowe wierzchołki na danych liniach, to V powiększyłoby się o 2, S powiększyłoby się o 1, a L powiększyłoby się o 3 (nowa linia i podział dwóch danych linii) — i znów wzór Eulera jest prawdziwy. Wreszcie może zajść przypadek, gdy nowa linia jest wprawdzie związana z siecią granic jednym ze swych końców, ale drugi jej koniec kończy się „w polu"; wówczas nowa linia nie wprowadza nowego kraju i S zostaje bez zmiany, natomiast zarówno V jak i L jednocześnie powiększają się o 1 — w przypadku, gdy nowa linia jest przeciągnięta z dawnego wierzchołka, jak na rysunku (269), albo też V i L powiększają się jednocześnie o 2 — w przypadku, gdy początek nowej linii leży w nowym wierzchołku. W obu tych przypadkach reguła Eulera utrzymuje się.

(268) F. Frankl und L. Pontriagin, Mathematische Annalen 102 (1930), str. 785—789.

(274) Porównaj (24).

(282) J. B. Listing (1808—1882) ogłosił w r. 1847 pierwszą książkę o topologii.

Por. książkę (120), rozdział V.

(286) Zagadnienie kasowania węzłów zakomunikował autorowi K. Borsuk. Rozwiązał je J. Mycielski; Fundamenta Mathematicae 42 (1954).

(298) Zagadnienie czterech barw postawił Möbius w r. 1840. Dowód dla każdej mapy o mniej niż 38 krajach podał Philip Franklin, Journal of Mathematics and Physics 16 (1937), str. 172—84.

Łatwy dowód twierdzenia Heawooda, że wystarczy zawsze pięć kolorów, jest w książce (120), w dopisku do rozdziału V.

Informacje o zagadnieniu 7 barw daje książka (21), str. 235.

(305) H. Lebesgue, Mathematische Annalen 70 (1911), str. 166 i dalsze; dowód niewystarczający. Udowodnił L. E. J. Brouwer, Journal f. reine u. angewandte Math. 142 (1913), str. 150 i dalsze.

(306) Postawione przez S. Ulama i udowodnione przez K. Borsuka, Fundamenta Mathematicae 20 (1933), str. 177—90.

(307) L. E. J. Brouwer.

Prawo adiabat odkrył S. D. Poisson (1781—1840). Prawo Boyle'a: 1662.

(308) J. G. Smith i A. J. Duncan, *Sampling Statistics and Applications*, New York, McGraw-Hill, 1945, str. 137—52. Daty autentyczne.

(315) J. B. Trevan, Proceedings of the Royal Soc. B 101 (1927), str. 483.

(316) A. J. Lotka, *Elements of Physical Biology*, Baltimore, Williams & Wilkins, 1925. Tamże odsyłacze:

Str. 70: H. G. Thornton, Annual of Applied Biology, 1922, str. 265.

Str. 74: H. S. Reed i R. H. Holland, Proceedings of the National Academy of Sciences, 5 (1919), str. 140.

Str. 360: American Reference Book, 1914, str. 235; World Almanac, 1921, str. 277, Statistical Abstracts, 1920, str. 814.

Str. 103: Tables of Glover.

Używając tych źródeł Lotka obliczył funkcje; nasze ryciny są oparte na jego datach.

(319) F. E. Croxton i D. I. Cowden, *Applied General Statistics*, New York, Prentice-Hall, 1946, XVI, str. 452—58; wykres 171, str. 457. Krzywą logistyczną znalazł belgijski matematyk Verhulst.

Por.: Raymond Pearl, *The Biology of Population Growth*, New York, A. A. Knopf. 1925, XVIII.

SPIS TREŚCI

Obwolutę projektował Tadeusz Gronowski
Tłoczenia na okładce projektował Józef Kowalewski
Rysunki wykonał Edmund Jakubowski
Redaktor odpowiedzialny: Zygmunt Koehler
Redaktor techniczny: Jan St. Kopczewski

Prace przygotowawcze (reprodukcja, retusz, montaż) wykonali: Franciszek Błażejewicz, Zygmunt Lewandowski, Agnieszka Madej, Edmund Maternowski, Henryk Piaskowski, Jan Przybysławski i Edward Stek

Drukowali: Eugeniusz Jeliński i Franciszek Szczęsny
Tłoczenia na okładce wykonał Kazimierz Orzechowski

Książka zatwierdzona pismem Ministerstwa Oświaty nr Oc-19/11/52 z 14 czerwca 1952 r. jako pożądana w bibliotekach licealnych szkół ogólnokształcących i pedagogicznych

Państwowe Zakłady Wydawnictw Szkolnych — Warszawa 1954
Wydanie siódme (drugie w języku polskim)
Nakład: 15 000+180 egz.
Arkuszy: druk. 19,5; wyd. 13,1
Papier offsetowy, 61×86 cm, 120 g, kl. III
Cena książki: 30.— zł
Oddano do składania 31 VIII 1953 r.
Podpisano do druku 17 IX 1954 r.
Druk ukończono w grudniu 1954 r.
Zamówienie nr 8162/A699
Zarządzenie nr 1209
E-5-14207

Książkę wykonano w Zakładach Graficznych PZWS
Bydgoszcz — ul. Generalissimusa Stalina 1